РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

УДК 519.17

ЕРМАКОВА ГАЛИНА МИХАЙЛОВНА

ДВЕ ЗАДАЧИ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук В.В. Кабанов

ЕКАТЕРИНБУРГ – 2009

Содержание

Введение

Пусть G — транзитивная группа подстановок на конечном множестве X. Если порядок группы четен, то стабилизатор в G точки $x \in X$ имеет симметричную орбиту $\Delta(x)$ на X отличную от $\{x\}$. Тогда по группе G можно построить граф Γ с множеством вершин X, и две вершины x, y смежны в Γ тогда и только тогда, когда $y \in \Delta(x)$.

Изучение графов, полученных таким образом, является важной задачей алгебраической теории графов. Если в качестве группы G рассмотреть симметрическую группу подстановок S_n на n символах, а в качестве множества X — множество всех транспозиций из S_n и считать смежными любые две неперестановочные транспозиции, то получим треугольный граф $T(n)$. Нетрудно видеть, что этот граф является сильно регулярным графом с параметрами $(\frac{n(n-1)}{2}, 2(n-2), n-2, 4)$. Кроме того, он не содержит порожденных $K_{1,3}$-подграфов. В работах 1959-60 гг. Л. Чанг [10] и А. Хоффман [13], [14] независимо показали, что треугольный граф $T(n)$ определяется однозначно своими параметрами для всех n, за исключением $n = 8$. Для случая $n = 8$ было показано, что кроме треугольного графа $T(8)$, такие же параметры имеют только три графа, которые были найдены Л. Чангом в 1949 г. [9].

Класс графов без 3-лап содержит такой важный класс графов, как реберные графы. Реберный граф $L(K_{m,n})$ полного двудольного графа $K_{m,n}$ с долями порядка m и n является кореберно регулярным графом с параметрами $(mn, m+n-2, 2)$. Граф $L(K_{m,n})$ называют $m \times n$*-решеткой*, и при $m = n$ этот граф является сильно регулярным графом с параметрами $(n^2, 2n-2, n-2, 2)$. С. Шрикханде [18] и А. Хоффман [15] показали, что граф, имеющий параметры $m \times n$-решетки, является либо $m \times n$-решеткой, либо графом Шрикханде, при $n = 4$. Все вышеперечисленные графы имеют наименьшее собственное значение -2. Результаты Л. Чанга, С. Шрикханде и А. Хоффмана были объединены Дж. Зейделем [17], который определил все сильно регулярные графы с наименьшим собственным значением -2. В частности, Дж. Зейдель показал, что кроме треугольных графов $T(n)$ и $n \times n$-решеток, сильно регулярными графами, которые имеют наименьшее собственное значение -2, являются только графы $K_{n\times 2}$, графы Петерсена, Шрикханде, Клебша, Шлефли и три графа Чанга.

Полное описание графов без 3-лап с несвязными μ-подграфами было получено А. Брауэром и М. Нуматой [8]. Они показали, что если граф связный конечный и содержит 3-коклику, то он является $m \times n$-решеткой. Этот результат был обобщен В.В. Кабановым в [5]. Им было доказано, что связный редуцированный граф без 3-лап содержит 3-коклику, а любой его μ-подграф имеет радиус больше 1, тогда и только тогда, когда он является либо треугольным графом $T(n)$ с $n \geq 6$, либо $m \times n$-решеткой с $n \geq 3$ и $m \geq 3$, либо графом Шлефли. Граф Шлефли — это единственный сильно регулярный граф с параметрами $(27, 16, 10, 8)$. В работах И.А. Вакулы и В.В. Кабанова [1], [2] описаны связные графы без 3-лап с некликовыми μ-подграфами.

А. Деза и М. Деза рассматривали химические графы полициклических сопряженных углеводородов и полицикличеких ароматических углеводородов. В связи с этим исследованием возникла необходимость изучения графов, которые впоследствии были названы графами Деза.

В 1994 г. А. Деза и М. Деза [11] привели пример точного графа Деза с параметрами $(40, 15, 6, 4)$.

М. Эриксон, С. Фернандо, У.Х. Хаймерс, В. Харди и Дж. Хемметр [12] описали все точные графы Деза с числом вершин не более 13. А.А. Махневым [7] рассматривались графы Деза, которые являются кликовыми или кокликовыми расширениями сильно регулярных графов.

В диссертации рассматриваются только конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Далее всюду подграф графа Γ будет означать индуцированный подграф графа Γ. Для вершины a графа Γ через

$[a]([a]')$ обозначим подграф на множестве всех вершин, смежных(несмежных) с a. Этот подграф называется *окрестностью вершины* a в графе Γ. Через k_a обозначим *валентность* вершины a в Γ, т. е. число вершин в $[a]$. Граф Γ называется *регулярным* валентности k, если $k_a = k$ для любой вершины a из Γ. Для ребра ac графа Γ через λ_{ac} обозначим число вершин в подграфе $[a] \cap [c]$. Граф Γ называется *реберно регулярным* с параметрами (v, k, λ), если Γ — регулярный граф на v вершинах валентности k, в котором каждое ребро лежит в λ треугольниках, т. е. $\lambda_{ac} = \lambda$ для любого ребра ac графа Γ. Подграф $[a] \cap [b]$ назовем *μ-подграфом*, если вершины a, b находятся на расстоянии 2 друг от друга в графе Γ и будем обозначать его через $M(a, b)$. Граф Γ на v вершинах валентности k называется *μ-регулярным* с параметрами (v, k, μ), если все его μ-подграфы имеют μ вершин. Если такой граф имеет диаметр 2, то он называется *кореберно регулярным.* Если реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) является μ-регулярным графом, то он называется *вполне регулярным* графом с параметрами (v, k, λ, μ). Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным.*

Полный граф назовем *кликой*, а вполне несвязный граф — *кокликой.* Клика(коклика) порядка n называется *n-кликой(кокликой)*.

Пусть n — натуральное число. Под *n-расширением* графа Γ будем понимать граф Γ', полученный заменой каждой вершины a из Γ на n-клику (a), причем вершины из (a) и (b) смежны в Γ' тогда и только тогда, когда a и b смежны в Γ.

Графом Пэли называется граф, вершинами которого являются элементы конечного поля F_q, где q сравнимо с 1 по модулю 4, и две вершины смежны, если разность соответствующих элементов поля F_q является ненулевым квадратом.

Граф Γ на v вершинах назовем *графом Деза* с параметрами (v, k, b, a), если для любых вершин u и w из Γ

$$|[u] \cap [w]| = \begin{cases} a \text{ или } b, & \text{если } u \neq w, \\ k, & \text{если } u = w, \end{cases}$$

где v, k, b, a — целые числа такие, что $0 \leq a \leq b \leq k < v$.

Очевидно, класс графов Деза содержит класс *сильно регулярных графов*. Графы Деза, не являющиеся сильно регулярными и имеющие диаметр 2, называются *точными графами Деза*.

Рассмотрим графы $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ и $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$, где V_1 и V_2 — непересекающиеся множества вершин, а E_1 и E_2 — множества ребер графов Γ_1 и Γ_2 соответственно.

Объединением таких графов Γ_1 и Γ_2 назовем граф $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.

Суммой графов Γ_1 и Γ_2 назовем граф $\Gamma_1 + \Gamma_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup E_3)$, где $E_3 = \{\{x, y\} \mid x \in V_1, y \in V_2\}$.

Дополнение $\overline{\Gamma}$ графа Γ имеет в качестве множества вершин множество вершин графа Γ и две вершины в $\overline{\Gamma}$ смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в Γ.

Цель диссертации. Целью данной работы является решение следующих задач.

1) Изучить связные графы без порожденных $K_{1,3}$-подграфов, содержащих 3-коклику, в которых для любой пары вершин u, v, находящихся на расстоянии 2 друг от друга, подграф $M(u, v) = [u] \cap [v]$ содержит μ вершин, если он не является кликой, и содержит ν вершин в противном случае.

2) Исследовать точные графы Деза без 3-коклик с $\mu = b$.

Методы исследования. Основными методами исследования являются методы алгебраической теории графов.

Научная новизна. Основные результаты, полученные в работе, являются новыми. Выделим из них следующие.

1. Классифицированы связные графы без порожденных $K_{1,3}$-подграфов, содержащих 3-коклику, в которых для любой пары вершин u, v, находящихся на расстоянии 2 друг от друга, подграф $M(u,v) = [u] \cap [v]$ содержит μ вершин, если он не является кликой, и содержит ν вершин в противном случае.

2. Найдено соотношение для параметров a и b точного графа Деза без 3-коклик с $\mu = b$.

3. Описаны некоторые свойства и в отдельных случаях получено полное описание точных графов Деза без 3-коклик с $\mu = b$.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты могут быть использованы для характеризации графов, возникающих из алгебраических структур, в частности, графов Джонсона и Грассмана, а также в химии кристаллических соединений.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на 35-й, 37–40-ой Региональных молодежных конференциях ИММ УрО РАН (Екатеринбург, 2004, 2006–2009 гг.), Международной школе-конференции по теории групп (Нальчик, 2007 г.).

Результаты работы докладывались и обсуждались на алгебраическом семинаре ИММ УрО РАН.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [19]–[24]. Работы [19]–[22] и [24] выполнены в нераздельном соавторстве с В.В. Кабановым.

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, двух глав и списка цитированной литературы, содержащего 24 наименования.

Результаты диссертации. Во введении обсуждается история вопроса, даются определения и формулируются основные результаты.

В главе I рассматриваются связные графы без порожденных $K_{1,3}$-подграфов. В.В. Кабановым, А.А. Махневым в работе [4] были классифицированы такие графы в предположении, что все μ-подграфы равномощны.

Следующий результат является основным в главе I.

Теорема 1 *Пусть* Γ *— связный граф без порожденных* $K_{1,3}$*-подграфов, содержащий 3-коклику. Пусть также в* Γ *для любой пары вершин* u, v *на расстоянии 2 друг от друга подграф* $M(u,v) = [u] \cap [v]$ *содержит* μ *вершин, если он не является кликой, и содержит* ν *вершин в противном случае. Если* $\nu \geq \mu$, *то все подграфы* $M(u,v)$ *в* Γ *одного типа, т. е. все кликовые или все некликовые.*

Из этой теоремы и результата полученного В.В. Кабановым и А.А. Махневым в [4] имеем

Следствие 1 *Пусть* Γ *— связный граф без порожденных* $K_{1,3}$*-подграфов, содержащий 3-коклику. Пусть также в* Γ *для любой пары вершин* u, v *на расстоянии 2 друг от друга подграф* $M(u,v) = [u] \cap [v]$ *содержит* μ *вершин, если он не является кликой и содержит* ν *вершин в противном случае, где* $\nu \geq \mu$. *Тогда*

(1) *либо граф* Γ *является* α*-расширением графа икосаэдра, либо в* $\Gamma - \Gamma^{\perp}$ *подграф на множестве всех вершин с некликовыми окрестностями является пустым графом, кликой или* α*-расширением связного графа с* $\mu = 1$*;*

(2) *граф* Γ *является* α*-расширением одного из следующих графов:*

(*i*) $m \times n$*-решетки, где* $m \geq 3$ *и* $n \geq 3$*;*

(*ii*) *треугольного графа* $T(m), m \geq 6$*;*

(*iii*) *графа Шлефли.*

Во второй главе работы рассматриваются точные графы Деза без 3-коклик с $\mu = b$. Описаны точные графы Деза, которые являются суммой сильно регулярных графов или точных графов Деза, и точные графы Деза, которые являются кликовыми расширениями сильно регулярных графов. Пусть Γ — точный граф Деза без 3-коклик с $\mu = b$ и вершина x — произвольная вершина графа Γ. Будем называть вершину $u \in [x]$ графа Γ вершиной "типа a" для вершины x, если $|[x] \cap [u]| = a$, а вершину $w \in [x]$ — вершиной "типа b" для вершины x, если $|[x] \cap [w]| = b$.

Пусть y и z — несмежные вершины разных типов из $[x]$ и $|[x] \cap [y] \cap [z]| = \alpha$. Обозначим через δ_y число всех вершин, не смежных с вершиной z в $[x]$, а через δ_z — число всех вершин, не смежных с вершиной y в $[x]$.

Если $\delta_z = \delta_y + 1$, то будем назвать граф Γ графом типа I. Если $\delta_z = \delta_y + 2$, то будем назвать граф Γ графом типа II.

Основными результатами второй главы являются следующие теоремы

Теорема 2 *Пусть* Γ *— точный граф Деза с параметрами* (v, k, b, a) *без 3-коклик с* $\mu = b$. *Тогда* $(b - a) \in \{1, 2\}$.

Теорема 3 *Пусть* Γ *— точный граф Деза с параметрами* (v, k, b, a) *без 3-коклик с* $\mu = b$ *и в* Γ *есть вершина, окрестность которой содержит две несмежные вершины разных типов. Тогда*

(1) *если* $\delta_y = 1$, *то либо граф* Γ *типа I с параметрами* $(8, 4, 2, 1)$, *либо* Γ *— граф типа II с параметрами* $(8n, 8n - 4, 8n - 6, 8n - 8)$, $n \geq 1$;

(2) *если* $\alpha = \delta_y$ *и граф* Γ *— граф типа I, то* Γ *имеет параметры* $(8, 4, 2, 1)$ *или* $(12, 7, 4, 3)$.

Теорема 4 *Пусть* Γ *— точный граф Деза с параметрами* (v, k, b, a) *без 3-коклик с* $\mu = b$ *и для некоторой вершины* $x \in \Gamma$ *любая вершина "типа* a*" смежна со всеми вершинами "типа* b*", и наоборот. Если все вершины "типа* b*" для* x *смежны между собой, то граф* Γ *является 2-расширением графа* $K_{n \times 2}$

Теорема 5 *Пусть* Γ *— точный граф Деза с параметрами* (v, k, b, a) *без 3-коклик и* $b = a + 2$. *Граф* Γ *является точный графом Деза тогда и только тогда, когда* $\overline{\Gamma}$ *является вполне регулярным графом с параметрами* $(v, v - k - 1, 0, 2)$.

1 Графы без 3-лап

1.1 Предварительные результаты

Мы называем n-угольником $a_1a_2\dots a_n$ связный регулярный граф валентности 2 на n вершинах, в котором a_1a_n, a_ia_{i+1} — ребра, $i = 1, \dots, n-1$. Графом Тэйлора называется вполне регулярный граф диаметра 3, в котором каждая вершина лежит в $a^\perp \cup b^\perp$ для любых двух вершин с $d(a, b) = 3$. Граф икосаэдра — это граф Тэйлора, в котором окрестность любой вершины является пятиугольником. Граф Тервиллигера — это неполный граф, в котором для некоторого фиксированного $\mu > 0$ все μ-подграфы являются кликами из μ вершин. Графом Шлефли называется сильно регулярный граф с параметрами $(27, 16, 10, 8)$, который является дополнительным к точечному графу обобщенного четырехугольнника $GQ(2, 4)$.

Ядром подграфа Δ, содержащего более одной вершины, мы будем называть подграф $K(\Delta) = \Delta^\perp \cap \Delta$. Ядром вершины a называется подграф $K(a) = \{x \in \Gamma | x^\perp = a^\perp\}$. Число вершин в $K(a)$ будем обозначать через $\hat{a}$. Вершину a назовем редуцированной, если $K(a)$ состоит из единственной вершины, т. е. $\hat{a} = 1$. Граф Γ называется редуцированным, если все его вершины редуцированы. Пусть $x \equiv y$ тогда и только тогда, когда $x^\perp = y^\perp$. Редукцией графа Γ называется фактор-граф $\bar{\Gamma}$ графа Γ по отношению $\equiv$.

Лемма 1 *Пусть* Γ *— связный* μ*-регулярный граф без* 3*-лап. Тогда либо* Γ *не содержит* 3*-коклик, либо является* α*-расширением одного из следующих графов*:

(1) *регулярного графа Тервиллигера с* $\mu = 1$ *диаметра большего* 2;

(2) *прямоугольной* $m \times n$*-решетки,* $m \geq 3$*,* $n \geq 3$;

(3) *треугольного графа* $T(m)$*,* $m \geq 6$;

(4) *графа Шлефли*;

(5) *графа икосаэдра.*

Доказательство. Это теорема 1 из [3].

Лемма 2 *Пусть* Γ *— неполный связный граф без* 3*-лап, в котором для некоторого фиксированного* $\mu > 0$ μ*-подграфы являются кликами из* μ *вершин. Тогда либо граф* Γ *является* α*-расширением графа икосаэдра, либо в* $\Gamma - \Gamma^{\perp}$ *подграф на множестве всех вершин с некликовыми окрестностями является пустым, кликой или* α*-расширением связного графа с* $\mu = 1$.

Доказательство. Это теорема 1 из [5].

Если граф Γ удовлетворяет условиям леммы 2 и для любой пары вершин из Γ на расстоянии 2 друг от друга подграф $M(u, v)$ является кликой, то такие графы были изучены.

Лемма 3 *Пусть* Γ *— связный граф без* 3*-лап, содержащий* 3*-коклику, в котором все* μ*-подграфы имеют одинаковое число вершин. Тогда либо* Γ *имеет диаметр больше двух и является графом из заключения леммы 2, либо граф* Γ *является* α*-расширением одного из следующих графов*:

(1) *прямоугольной* $m \times n$*-решетки,* $m \geq 3$, $n \geq 3$;

(2) *треугольного графа* $T(m)$, $m \geq 6$;

(3) *графа Шлефли.*

Доказательство. Это теорема 2 из [5].

Таким образом, в графе без 3-лап, содержащем 3-коклику, μ-подграфы могут быть только одного типа, т. е. все кликовые или все некликовые. И.А. Вакулой и В.В. Кабановым в статьях [1, 2] графы без 3-лап, содержащие 3-коклику с некликовыми μ-подграфами, были изучены без предположения о числе вершин в подграфах $M(u, v)$.

Лемма 4 *Пусть* Γ *— связный граф Тервиллигера без корон,* Γ' *— подграф на множестве вершин с некликовыми окрестностями. тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) Γ *не содержит 3-коклик и является кликовым расширением 2-пути, 3-пути, пятиугольника или пятиугольной пирамиды;*

(2) Γ *не содержит 3-лап, но содержит 3-коклику, диаметр больше 2 и либо*

(a) Γ *является кликовым расширением графа икосаэдра, либо*

(b) Γ *является кликой и* Γ *является кликовым расширением графа* Δ*, где* Δ *содержит* δ*-клику и* δ *или* $\delta - 1$ *вершин степени 1, смежных с различными вершинами клики, либо*

(c) Γ *является кликовым расширением графа* Δ *графа с* $\mu = 1$*;*

(3) Γ *содержит 3-лапу,* $\mu = 1$ *и окрестность любой вершины из* Γ *состоит из изолированных клик.*

Доказательство. Это теорема 1 из [6].

Далее будем предполагать, что граф Γ не содержит 3-лап.

Лемма 5 *Пусть* $a \in \Gamma$*. Тогда*:

(1) *если* b, c *— несмежные вершины из* $[a]$*, то* $a^\perp \subseteq b^\perp \cup c^\perp$;

(2) *для любого ребра* ac *из* Γ *подграф* $[a] - c^\perp$ *является кликой*;

(3) *если* b, c *— несмежные вершины из* $\Gamma - a^\perp$*, то* μ*-подграф* $[b] \cap [c]$ *содержится в* $\Gamma - a^\perp$*.*

Доказательство. Пусть b, c — несмежные вершины из $[a]$, $x \in [a]$ и $x \notin b^\perp \cup c^\perp$. Тогда подграф на $\{a; x, b, c\}$ является 3-лапой.

(2) Пусть $[a] - c^\perp$ не является кликой. Тогда x, y — несмежные вершины из $[a] - c^\perp$. Получаем 3-лапу $\{a; x, y, c\}$, что противоречит условию.

(3) Пусть $x \in [b] \cap [c] \cap [a]$. Тогда x — общая смежная для a, b и c, т. е получили 3-лапу $\{x; a, b, c\}$. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 6 *Если* $acbd$ *— четырехугольник графа* Γ*, то*:

(1) $a^\perp \cup b^\perp = c^\perp \cup d^\perp$;

(2) *если* ce *— ребро из* $([a] \cap [b]) - d^\perp$*, то* $c^\perp$ *и* $e^\perp$ *совпадают вне* $[d]$*.*

Доказательство. (1) Докажем, что $a^\perp \cup b^\perp \subseteq c^\perp \cup d^\perp$. По лемме 5 $a^\perp \subseteq c^\perp \cup d^\perp$ и $b^\perp \subseteq c^\perp \cup d^\perp$. Следовательно, $a^\perp \cup b^\perp \subseteq c^\perp \cup d^\perp$. Обратно (для c и d) аналогично.

(2) По пункту (1) $a^\perp \cup b^\perp = c^\perp \cup d^\perp$ и $a^\perp \cup b^\perp = e^\perp \cup d^\perp$, так как $e \not\sim d$. Значит, $e^\perp \cup d^\perp = c^\perp \cup d^\perp$ и $e^\perp - d^\perp = c^\perp - d^\perp$. Лемма доказана.

Пару вершин a, b назовем сильной парой графа Γ, если μ-подграф $[a] \cap [b]$ не является кликой. Заметим, что если $acbd$ — четырехугольник графа Γ, то пары a, b и c, d являются сильными. И обратно, если пара вершин является сильной, то она содержится в некотором четырехугольнике.

Лемма 7 *Пусть a, b — сильная пара.*

(1) *Если окрестность некоторой вершины x содержит μ-подграф $[a] \cap [b]$, то $x^\perp$ содержит $a^\perp$ или $b^\perp$.*

(2) *Если $x \in [a] - [b]$, то либо $[x] \cap [b]$ содержит несмежную с а вершину, либо $a^\perp$ содержит $x^\perp$, либо $[x] \cap [b]$ является кликой из $[a] \cap [b]$.*

Доказательство. (1) Так как $x^\perp$ содержит $M(a, b)$, то по лемме 6 $x \in a^\perp \cup b^\perp$ Рассмотрим три возможных случая для x.

Если $x \not\sim a$ и $x \sim b$, то по лемме 6 имеем $a^\perp \cup x^\perp = c^\perp \cup d^\perp$ и $a^\perp \cup b^\perp = c^\perp \cup d^\perp$. Следовательно, $a^\perp \cup b^\perp = a^\perp \cup x^\perp$ и $x^\perp - a^\perp = b^\perp - a^\perp$. По условию $x^\perp$ содержит $[a] \cap [b]$. Значит, $x^\perp$ содержит $b^\perp$.

Если $x \sim a$ и $x \not\sim b$, то, аналогично рассуждая, получим: $x^\perp$ содержит $a^\perp$.

Случай, когда вершина $x \sim a$ и $x \sim b$, невозможен, так как $[x]$ содержит μ-подграф $[a] \cap [b]$.

(2) Пусть $x \sim a$ и $x \not\sim b$.

Пусть $[x] \cap [b] \subseteq [a]$, и предположим, что есть 2 несмежные вершины в $[x] \cap [b]$. Следовательно, x, b — сильная пара и $a^\perp$ содержит $x^\perp$ или $b^\perp$. Так как $a \not\sim b$, то $a^\perp$ содержит $x^\perp$. Лемма доказана.

Зафиксируем четырехугольник $acbd$ из Γ.

Лемма 8 *Если $e \notin a^\perp \cup b^\perp$ и подграф $[b] \cap [e]$ не является кликой, то $x^\perp = b^\perp$ для любой несмежной с a вершины $x \in [c] \cap [d]$.*

Доказательство. Берем x из $([c] \cap [d]) - a^\perp$. Тогда по лемме 6 получаем $a^\perp \cup x^\perp = c^\perp \cup d^\perp$ и $a^\perp \cup b^\perp = c^\perp \cup d^\perp$. Отсюда $a^\perp \cup b^\perp = a^\perp \cup x^\perp$ и $b^\perp - a^\perp = x^\perp - a^\perp$. Так как подграф $[b] \cap [e]$ не является кликой, то существуют несмежные вершины y и z из $[b] \cap [e]$. Заметим, что вершина x не смежна с вершиной e. Следовательно, $x \notin [b] \cap [e]$, то есть вершина x должна быть обязательно смежна либо с вершиной y, либо с вершиной z. Пусть $x \sim y$. Тогда можно записать равенства $x^\perp \cup e^\perp = y^\perp \cup z^\perp$ и $b^\perp \cup e^\perp = y^\perp \cup z^\perp$. Отсюда $b^\perp - e^\perp = x^\perp - e^\perp$. Значит, $x^\perp = b^\perp$. Лемма доказана.

Пусть $\Delta = a^\perp \cup b^\perp$ и $X(\Delta) = \{x \in \Delta | x^\perp \subseteq \Delta\}$.

Лемма 9 *Пусть $f \in \Gamma - \Delta$ и $[f]$ имеет непустое пересечение с Δ. Тогда*:

(1) *$[w] \cap X(\Delta)$ является кликой для $w \in [f] \cap \Delta$;*

(2) *если $w \in [a] \cap [c] \cap [f]$, то $[w] \cap ([a] - c^\perp)$ лежит в $[f]$.*

Доказательство. Пусть существуют несмежные вершины x, y из $w \cap X(\Delta)$. Следовательно, $[w] \subseteq x^\perp \cup y^\perp$. Противоречие, так как $\{w; f, x, y\}$ — 3-лапа.

Докажем второе утверждение. Пусть существует x из $[w] \cap ([a] - c^\perp)$ и $x \notin [f]$. Тогда $\{w; f, x, c\}$ — 3-лапа. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 10 *Пусть подграф $([a] \cap [b]) - d^\perp$ содержит ребро cx. Если $\Gamma_2(c) - \Delta$ содержит вершину f, то*

(1) *графы $[f] \cap [c]$ и $[f] \cap [x]$ совпадают.Более того,*

(2) *если $[x] - c^\perp$ содержит вершину из $[a] - [b]$, то $[f] \cap [x] \subseteq [b]$;*

(3) *если $[f] \cap [c]$ пересекает $[a]$ и $[b]$, то $c^\perp$ и $x^\perp$ совпадают вне $[f] \cap [b] \cap [d]$.*

Доказательство.Докажем (1). Так как граф Γ без 3-лап, то граф $[f] \cap [d]$ не пересекает $c^\perp$ и $x^\perp$. $\Delta = c^\perp \cup d^\perp$ и $\Delta = x^\perp \cup d^\perp$. Значит, $c^\perp \cup d^\perp = x^\perp \cup d^\perp$.

Докажем (2). Пусть вершина g из $[a] - [b]$ лежит в $[x] - c^\perp$ и существует вершина y из $[f] \cap [x]$, несмежная с b. Тогда $x^\perp \cup d^\perp = g^\perp \cup b^\perp$, т. е. $\Delta = g^\perp \cup b^\perp$.

$([x]\cap[f])\cap[g]=\varnothing$ и $g^\perp\cup b^\perp=a^\perp\cup b^\perp$, т. е. $g^\perp$ и $a^\perp$ совпадают вне $b^\perp$. Получаем 3-лапу $\{y;f,g,c\}$.

Утверждение (3) получаем из (2). Лемма доказана.

Лемма 11 *Если* $e\in\Gamma_3(f)$ *и* $acbe$ — 3-*путь, то* μ-*подграфы* $[a]\cap[b]$, $[c]\cap[e]$ *являются кликами.*

Доказательство. Предположим, что $[a]\cap[b]$ содержит несмежные вершины c и d. Тогда по лемме 6 получаем $e\in c^\perp\cup d^\perp$. Противоречие с тем, что e на расстоянии 3 от a. Лемма доказана.

Лемма 12 *Если* Λ — *связный граф, в котором все* μ-*подграфы регулярны одинаковой валентности, не являются кликами и имеют одинаковое число вершин, то* Λ *является регулярным графом.*

Доказательство. Пусть a,b — смежные вершины из Λ такие, что $a^\perp\neq b^\perp$ c — произвольная вершина из $[a]-b^\perp$. Если $\mu=|[b]\cap[c]|$ и α — валентность μ-подграфа $[b]\cap[c]$, то вершина c смежна с $\mu-\alpha-1$ вершиной из $[b]-a^\perp$. Теперь число ребер из $[b]-a^\perp$ в $[a]-b^\perp$ равно $|[b]-a^\perp|(\mu-\alpha-1)$, а число ребер из $[a]-b^\perp$ в $[b]-a^\perp$ равно $|[a]-b^\perp|(\mu-\alpha-1)$. Отсюда $|[b]-[a]|=|[a]-[b]|$ и, следовательно, $|[a]|=|[b]|$. Теперь утверждение следует из связности графа Λ. Лемма доказана.

1.2 Сильные тройки в графах без 3-лап

Лемма 13 *Пусть* $a\in\Gamma$, $b,e\in\Gamma_2(a)$ *и вершина* c *из* $[a]\cap([b]-e^\perp)$ *смежна с* f *из* $[a]\cap([e]-b^\perp)$. *Тогда* $[c]$ *и* $[f]$ *совпадают на* $a^\perp-([b]\cup[e])$.

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы. Тогда по лемме 5 имеем $c^\perp\subseteq b^\perp\cup f^\perp$, $f^\perp\subseteq c^\perp\cup e^\perp$. Отсюда следует $c^\perp-b^\perp\subseteq f^\perp$ и $f^\perp-e^\perp\subseteq c^\perp$. Значит, $[c]\cap(a^\perp-([b]\cup[e]))=[f]\cap(a^\perp-([b]\cup[e]))$. Лемма доказана.

В леммах 14, 15 предполагается, что $\{a, b, e\}$ — 3-коклика из Γ и $[a] \cap [b]$ содержит несмежные вершины c, d. В этом случае тройку вершин $\{a, b, e\}$ будем называть сильной.

Лемма 14 *Пусть $[c] \cap [e]$ содержит вершины u из $[a]$ и w из $[b]$. Если $([a] \cap [b]) - d^{\perp}$ содержит вершину z, не лежащую в $K(c)$, то для любой вершины x из $([a] \cap [b] \cap [c]) - z^{\perp}$ ее окрестность $[x]$ содержит $[b] - ([a] \cup [e])$ и $[a] - ([b] \cup [e])$.*

Доказательство. Поскольку $z \notin K(c)$, то $z^{\perp} \neq c^{\perp}$. По условию $z \notin d^{\perp}, z \in [a] \cap [b]$. Более того, $e \in \Gamma_2(c)$ и $[c] \cap [e] \cap [a]$ содержит вершину u, $[c] \cap [e] \cap [b]$ содержит вершину w. По лемме 10 окрестности $[c]$ и $[z]$ совпадают вне $[a] \cap [b] \cap [d]$. По прямоугольному соотношению $a^{\perp} \cup b^{\perp} = z^{\perp} \cup x^{\perp} = c^{\perp} \cup d^{\perp} = z^{\perp} \cup d^{\perp}$. Значит, $z^{\perp} - d^{\perp} = c^{\perp} - d^{\perp}$ и $x^{\perp} - z^{\perp} = d^{\perp} - z^{\perp}$. Берем элемент $y \in [b] - ([a] \cup [e])$, и пусть он несмежный с x. Тогда, так как z, x — несмежные из $[b]$ и y, x — несмежные, то y, z — смежные вершины. Так как $[z]$ и $[c]$ совпадают вне $[a] \cap [b] \cap [d]$, то y, c — смежные. Аналогично, вершины z, u — смежные. Вершины u, y — несмежные, так как иначе $\{u; a, y, e\}$ — это 3-лапа. Тогда x, u — смежные, так как иначе $\{c; x, y, u\}$ — 3-лапа. Теперь $\{u; z, x, e\}$ — 3-лапа. Противоречие. Значит y, x — смежные, т. е. $y \in [x]$. Лемма доказана.

Лемма 15 *Пусть $[a] \cap [e]$ содержит несмежные вершины f, g. Тогда*:

(1) *каждая вершина из $[a] - ([b] \cup K(a))$ смежна точно с одной вершиной из множеств $\{c, d\}$ и $\{f, g\}$ (в частности, без ограничения общности, можно считать, что cf, dg — ребра*);

(2) *если μ-подграфы $[c] \cap [g]$, $[f] \cap [d]$ имеют непустое пересечение с $[b] \cap [e]$, то любая вершина из $[c] \cap [g] \cap [b] \cap [e]$ не смежна с вершинами из $[f] \cap [d] \cap [b] \cap [e]$.*

Доказательство. (1) Возьмем вершину x из $[a] - ([b] \cup K(a))$. Тогда вершина x обязательно смежна с вершиной c или с вершиной d (иначе $\{a; x, c, d\}$

3-лапа). Вершина x не может быть смежна с c и d одновременно, иначе по лемме 6 получим $x^{\perp} = a^{\perp}$. Это противоречит условию $x \notin K(a)$.

(2) Если u — вершина из $[c] \cap [g] \cap [b] \cap [e]$, смежная с $w \in [f] \cap [d] \cap [b] \cap [e]$, то $\{w, d, f\}$ является 3-кокликой из $[u]$. Противоречие. Лемма доказана.

В леммах 16–18 предполагается, что $[a] \cap [e]$ содержит несмежные вершины f, g, причем cf, dg — ребра в Γ.

Лемма 16 *Пусть* $[c] \cap [d]$ *содержит вершину* x *из* $[a] \cap [b]$ *и* $x \in [g] - [f]$. *Тогда*

(1) *окрестности* $[c]$ *и* $[x]$ *совпадают на* $[b] - ([a] \cup [e])$, *а окрестности* $([d], [g], [x])$ *совпадают на* $[a] - ([b] \cup [e])$;

(2) *если* x *не смежна с некоторой вершиной* g' *из* $[d] \cap [a] \cap [e]$, *то* $[b] - ([a] \cup [e])$ *лежит в* $[c] \cap [x]$ *и* $[a] - ([b] \cup [e])$ *содержится в* $[d] \cap [x] \cap [g']$;

(3) *если* x *смежна с некоторой вершиной* f' *из* $[c] \cap [a] \cap [e]$, *то* $[b] - ([a] \cup [e])$ *лежит в* $[d]$ *и* $[a] - K(a)$ *содержится в* $[b] \cup [e]$.

Доказательство (1) Докажем равенство $[c] \cap ([b] - ([a] \cup [e])) = [x] \cap ([b] - ([a] \cup [e]))$ двумя включениями:

$(\subseteq)$: Пусть $w \in [c] \cap ([b] - ([a] \cup [e]))$ и вершина w не смежна с x. Тогда $\{c; w, x, f\}$ — 3-лапа при $x \in [g] - [f]$. При $x \in [f] - [g]$ в предположении, что wx — не ребро, получаем 3-лапу $\{a; c, d, f\}$.

$(\supseteq)$: Пусть $w' \in [x] \cap ([b] - ([a] \cup [e]))$ и $w' \notin [c]$. Тогда $w' \in [g]$, так как иначе $\{x; c, w', g\}$ — 3-лапа. Получаем 3-лапу $\{g; a, e, w'\}$. Противоречие.

Теперь докажем, что $[d], [g], [x]$ совпадают на $[a] - ([b] \cup [e])$. Рассмотрим $\{d, g\}$ — для них выполняется лемма 13 и $\{x, g\}$ — и для них выполняется лемма 13, т. е. $[d] \cap ([a] - ([b] \cup [e])) = [g] \cap ([a] - ([b] \cup [e])) = [x] \cap ([a] - ([b] \cup [e]))$.

(2) Покажем, что $[d] - [g'] \subseteq [x]$. Берем произвольную вершину $y \in [d] - [g']$. Если $y \notin [x]$, то получаем $\{d; x, y, g'\}$ — 3-лапа. Следовательно, $y \in [x]$. Теперь докажем включение $[d] \cap ([b] - ([a] \cup [e])) \subseteq [x]$. Пусть вершина w'' из $[d] \cap ([b] - ([a] \cup [e]))$ и $w'' \notin [x]$. Тогда $\{d; x, g', w''\}$ — 3-лапа. Поэтому

$[d] \cap ([b] - ([a] \cup [e])) \subseteq [x]$. По лемме 5 $w'' \notin [g']$. Значит, $[b] - ([a] \cup [e])$ лежит в $[c] \cap [x]$ (по лемме 16). Далее, $[d] \cap ([a] - ([b] \cup [e])) = [g'] \cap ([a] - ([b] \cup [e])) = [g] \cap ([a] - ([b] \cup [e])) = [x] \cap ([a] - ([b] \cup [e]))$. Так как $[x]$ и $[g']$ совпадают на разности $[a] - ([b] \cup [e])$ и x, g' — несмежные, то $([a] - ([b] \cup [e])) \subseteq [d] \cap [x] \cap [g']$. Лемма доказана.

Лемма 17 *Пусть* $[a] \cap [b]$ *содержит* 3*-путь* $cxyd$. *Тогда*:

(1) *граф* $[x] \cap [y]$ *содержит* $[b] - ([a] \cup [e])$, $[b] \cap [e] \neq \varnothing$;

(2) *если* $[x]$ *пересекает* $[b] \cap [e]$, *то* $[a] - ([b] \cup [e])$ *лежит в* $[y]$.

Доказательство. (1) Пусть $z \in [b] - ([a] \cup [e])$. По лемме 16(1) $[x]$ и $[y]$ совпадают на $[b] - ([a] \cup [e])$. Предположим, что z не лежит в $[x] \cap [y]$, т. е. $z \not\sim x$ и $z \not\sim y$. Выпишем прямоугольное соотношение: $c^{\perp} \cup d^{\perp} = a^{\perp} \cup b^{\perp} = c^{\perp} \cup y^{\perp} = x^{\perp} \cup d^{\perp}$. Значит,

$$y^{\perp} - c^{\perp} = d^{\perp} - c^{\perp}, \tag{$*$}$$

$$x^{\perp} - d^{\perp} = c^{\perp} - d^{\perp}. \tag{$**$}$$

Заметим, что по лемме 5 $z \in c^{\perp} \cup d^{\perp}$

Случай 1: пусть $z \sim c$ и $z \not\sim d$. Тогда $z \notin [d]$ и по равенству (**) получаем $z \sim x$. Противоречие.

Случай 2: пусть $z \sim d$ и $z \not\sim c$. Тогда по равенству (*) $z \sim y$. Противоречие.

Случай 3: пусть $z \sim c$ и $z \sim d$. Так как $z \not\sim x$, то $x \sim f$ и $x \not\sim g$. Поскольку $z \not\sim y$, то $y \sim g$ и $y \not\sim f$. Заметим, что в подграфе $[b] \cap [e]$ нет вершин, которые были бы смежны и с c,и с d, т. е. $[b] \cap [e] \cap [c] \cap [d]$ пусто. Тогда подграф $[b] \cap [e]$ разбивается на две части: вершины из $[c] \cap [x]$ и вершины из $[d] \cap [y]$. Поскольку $a^{\perp} \cup b^{\perp} = c^{\perp} \cup d^{\perp} = a^{\perp} \cup z^{\perp}$, то z смежна со всеми вершинами из $[b] \cap [e]$. Если взять вершину u из $[c] \cap [x]$ в подграфе $[b] \cap [e]$, то, поскольку $z \sim u$, получаем 3-лапу $\{u; z, e, x\}$. Таким образом, $[c] \cap [x] \cap [b] \cap [e]$

пусто. Аналогично, если возьмем вершину $w \in [d] \cap [y] \cap [b] \cap [e]$, то получим 3-лапу $\{w; z, e, y\}$. Противоречие.

(2) Пусть $u \in ([b] \cap [e]) \cap [x]$. Тогда $u \not\sim d$,и значит, $u \not\sim y$. Окрестность вершины x содержит несмежные вершины y и u. Берем вершину z из $[a] - ([b] \cup [e])$. Если $z \sim x$, то $z \sim y$, так как $z \not\sim u$ по лемме 6. Теперь пусть $z \not\sim x$. Тогда $z \sim d$ и $z \sim c$. Далее выпишем прямоугольное соотношение: $a^{\perp} \cup b^{\perp} = c^{\perp} \cup d^{\perp} = z^{\perp} \cup b^{\perp}$. Значит, окрестности вершин a и z совпадают вне $b^{\perp}$ и поэтому $z \sim f, z \sim g$. И теперь мы можем выписать еще одно прямоугольное соотношение: $a^{\perp} \cup e^{\perp} = f^{\perp} \cup g^{\perp} = z^{\perp} \cup e^{\perp}$, из которого следует, что $a^{\perp} - e^{\perp} = z^{\perp} - e^{\perp}$. Следовательно, $z \sim x$ и $z \sim y$. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 18 *Пусть* $[b] \cap [e]$ *содержит несмежные вершины* u, w *и* cu, dw *— ребра в* Γ. *Если* $[a] \cap [b]$ *содержит смежную с* c, d *вершину* x, *то либо* $x \in [u] - [w]$ *и или* x, e *— сильная пара, или подграф* c, d, f, g, u, w *является шестиугольником или объединением треугольников* c, u, f *и* g, d, w, *либо* $x \in [w] - [u]$ *и* $[b] - K(b)$ *содержится в* $[a] \cup [e]$, $[a] - K(a)$ *содержится в* $[b] \cup [e]$.

Доказательство. Без ограничения общности $x \in [g] - [f]$. Допустим сначала, что $x \in [u] - [w]$. В этом случае либо вершины u, g из $[x] \cap [e]$ несмежны, либо ug — ребро и подграф $\{c, d, f, g, u, w\}$ является шестиугольником.

Допустим теперь, что $x \in [w] - [u]$. В этом случае по лемме 13 графы $[x]$, $[w]$ и $[d]$ совпадают на $[b] - ([a] \cup [e])$. Докажем, что $[b] - K(b) \subseteq [a] \cup [e]$. Пусть $z \in [b] - K(b)$, т. е. $z \sim b$ и $z^{\perp} \neq b^{\perp}$. Так как $[x]$, $[w]$ и $[d]$ совпадают на $[b] - ([a] \cup [e])$, то $z \sim c$, или $z \sim d$, или $z \sim c, d$, иначе из вершины b получаем 3-лапу. Рассмотрим эти случаи:

Случай 1: пусть $z \sim c$ и $z \not\sim d$. Тогда по лемме 16 $z \sim x$, и так как окрестности вершин x и d совпадают, то $z \sim d$. Противоречие.

С л у ч а й 2: если $z \sim d$ и $z \not\sim c$. Но тогда $z \sim x$ и, значит, $z \sim c$. Противоречие.

С л у ч а й 3: пусть теперь $z \sim c$ и $z \sim d$. Выпишем прямоугольное соотношение: $b^\perp \cup a^\perp = c^\perp \cup d^\perp = z^\perp \cup a^\perp$, т. е. $b^\perp - a^\perp = z^\perp - a^\perp$. Таким образом, $z \sim \{u, w\}$. Из прямоугольного соотношения $b^\perp \cup e^\perp = u^\perp \cup w^\perp = z^\perp \cup e^\perp$ следует $b^\perp - e^\perp = z^\perp - e^\perp$. Поскольку $b^\perp$ и $z^\perp$ совпадают вне $a^\perp$ и $b^\perp$ и $z^\perp$ совпадают вне $e^\perp$, то $b^\perp = z^\perp$. Противоречие. Лемма доказана.

1.3 Графы без 3-лап с ограничениями на их μ-подграфы

Лемма 19 *Пусть a, b — вершины из Γ, находящиеся на расстоянии 2, $e \in \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$, $x \in K([a] \cap [e])$, y — несмежная с x вершина из $K([b] \cap [e])$.*

(1) *Если $d(x, b) = d(y, a) = 2$, то либо подграф $[x] \cap [y]$ содержит вершину z из $[a] \cap [b]$, либо $M(a, y)$, $M(x, b)$ не являются кликами, а $M(x, y)$ — клика.*

(2) *Если a, b — сильная пара, то выполняется заключение утверждения* (1).

Доказательство. (1) Пусть $|[x] \cap M(a, b)| = \alpha$ и $|[y] \cap M(a, b)| = \beta$. Тогда $|[x] \cap M(b, e)| = \left\{ \begin{array}{l} \mu - \alpha \\ \nu - \alpha \end{array} \right.$ и $|[y] \cap M(b, e)| = \left\{ \begin{array}{l} \mu - \beta \\ \nu - \beta \end{array} \right.$. Кроме того, μ-подграф $M(x, y)$ может быть кликовым или некликовым. В этот μ-подграф попадают вершины $[x] \cap M(b, e)$, $[y] \cap M(a, e)$ и вершины из $K(e)$.

С л у ч а й 1: если $|[x] \cap M(b, e)| = \mu - \alpha$, $|[y] \cap M(a, e)| = \mu - \beta$ и $|M(x, y)| = \mu$, то получаем $(\mu - \alpha) + (\mu - \beta) + \hat{e} \le \mu$, где $\hat{e} = |K(e)|$. Значит, $\mu + \hat{e} \le \alpha + \beta$. Или $\mu < \alpha + \beta$. Отсюда следует, что $M(x, y) \cap M(a, b) \ne \varnothing$.

С л у ч а й 2: если $|[x] \cap M(b, e)| = \nu - \alpha$, $|[y] \cap M(a, e)| = \mu - \beta$ и $|M(x, y)| = \mu$, то получаем $(\nu - \alpha) + (\mu - \beta) + \hat{e} \le \mu$. Значит, $\nu \le \alpha + \beta - \hat{e}$. Или $\mu \le \nu < \alpha + \beta$. Отсюда следует, что $M(x, y) \cap M(a, b) \ne \varnothing$.

С л у ч а й 3: если $|[x] \cap M(b, e)| = \nu - \alpha$, $|[y] \cap M(a, e)| = \nu - \beta$ и $|M(x, y)| = \mu$, то получаем $(\nu - \alpha) + (\nu - \beta) + \hat{e} \le \mu$. Значит, $2\nu - \nu \le 2\nu - \mu \le \alpha + \beta - \hat{e}$. Или $\mu \le \nu \le \alpha + \beta - \hat{e}$. Отсюда следует, что $M(x, y) \cap M(a, b) \ne \varnothing$.

С л у ч а й 4: если $|[x] \cap M(b,e)| = \nu - \alpha$, $|[y] \cap M(a,e)| = \nu - \beta$ и $|M(x,y)| = \nu$, то получаем $(\nu-\alpha)+(\nu-\beta)+\hat{e} \le \nu$. Значит, $\mu \le \nu \le \alpha+\beta-\hat{e}$. Отсюда следует, что $M(x,y) \cap M(a,b) \ne \varnothing$.

С л у ч а й 5: если $|[x] \cap M(b,e)| = \mu - \alpha$, $|[y] \cap M(a,e)| = \mu - \beta$ и $|M(x,y)| = \nu$, то получаем $(\mu - \alpha) + (\mu - \beta) + \hat{e} \le \nu$ или $2\mu - \nu \le \alpha + \beta - \hat{e}$. Получаем особый случай: $M(x,b)$ и $M(y,a)$ — некликовые подграфы и $M(x,y)$ — кликовый.

(2) Если a, b — сильная пара, то в подграфе $[a] \cap [b]$ содержится пара несмежных вершин c, d. Тогда вершина x смежна с c или d. Таким образом, $x \in \Gamma_2(b)$. Аналогично, вершина y смежна с c или d и, следовательно, $y \in \Gamma_2(a)$. Лемма доказана.

Лемма 20 *Если* Γ *является графом Тервиллигера без* 3*-лап и содержит* 3*-коклику, то* Γ *имеет диаметр больше* 2*.*

Доказательство. Пусть $\{x, y, z\}$ является 3-кокликой из Γ и диаметр Γ равен 2. Если для некоторой вершины u из $[x] \cap [z]$ найдется несмежная с ней вершина w из $[y] \cap [z]$, то по лемме 19 вершина z является сильной вершиной. Противоречие с определением графа Тервиллигера. Значит, любая вершина из $[x] \cap [z]$ смежна с любой вершиной из $[y] \cap [z]$. Но тогда ни одна вершина из $[x] \cap [y]$ не смежна ни с одной вершиной из $([x] \cap [z]) \cup ([y] \cap [z])$. Противоречие с условием на диаметр графа. Лемма доказана.

Пусть далее граф содержит четырехугольник $acbd$.

Лемма 21 *Пусть* $e \in \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$ *и* μ*-подграф* $[b] \cap [e]$ *является кликой. Тогда существует пара несмежных вершин* $x \in K([a] \cap [e])$ *и* $y \in [b] \cap [e]$ *такая, что подграф* $[x] \cap [y]$ *содержит вершину* z *из* $[a] \cap [b]$*. В частности, пары* x, y *и* e, z *являются сильными.*

Доказательство. Пусть $e \in \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$ и вершина x принадлежит $K([a] \cap [e])$. Пусть для определенности $x \in [c] - [d]$. Далее, $[x]$ содержит вершину c из $[a]\cap[b]$, поэтому x не смежна с некоторой вершиной y из $[b]\cap[e]$. Согласно лемме 19 либо для пары вершин x, y существует вершина z из $[a]\cap[b]$, и, значит, лемма доказана, либо $M(a, y)$, $M(x, b)$ не являются кликами, а $M(x, y)$ — клика.

Докажем, что последнее невозможно. Пусть $M(a, y)$, $M(x, b)$ — не являются кликами, а $M(x, y)$ — кликовый подграф, и предположим, что для любой пары несмежных вершин x из $K([a]\cap[e])$ и $y \in [b]\cap[e]$ выполняется $M(x, y) \cap M(a, b) = \varnothing$.

Теперь среди всех пар x, y, обладающих указанным свойством выберем такую, что вершина x смежна с наибольшим количеством вершин в подграфе $[b]\cap[e]$, т. е. $|[x]\cap M(b, e)| = \max|[x'']\cap M(b, e)|$ для всех x'' из $K(a, e)$. Пусть y — вершина из $[b]\cap[e]$ такая, что $y \not\sim x$ и подграф $[x]\cap[y]$ не пересекает $[a]\cap[b]$, т. е. $[x]\cap[y]$ — клика. Теперь выберем произвольную вершину x' из $K(a, e)$, отличную от x. Если $x' \sim y$, то данная вершина x' смежна со всеми вершинами подграфа $[x]\cap M(b, e)$, так как $[x]\cap[y]$ — клика, и еще x' смежна с вершиной y. Противоречие. Тогда получаем, что вершина y не смежна ни с одной вершиной из ядра подграфа $M(a, e)$.

Заметим, что подграф $M(a, e)$ не может быть кликой, иначе $M(a, y)$ попадает в $M(a, b)$.

Так как вершины c и d находятся на расстоянии 2 от e, то можно рассмотреть подграфы $M(c, e)$ и $M(d, e)$. Поскольку в $M(a, e)\cup M(b, e)$ нет вершин, несмежных с c и d одновременно, а также нет общих смежных для c и d, то $M(a, e)\cup M(b, e) = M(c, e)\cup M(d, e)$. Следовательно, $|M(c, e)| + |M(d, e)| = \mu + \nu$. Таким образом, получили две возможности: либо $M(c, e)$ не является кликой, а $M(d, e)$ — клика, либо $M(c, e)$ — клика, а $M(d, e)$ не клика.

С л у ч а й 1: $M(c, e)$ не является кликой, а $M(d, e)$ — клика. Подграф $M(c, e)$ не является кликой, и потому в нем существует пара несмежных вершин f и g:

(а) если f из $(M(a,e)\cap[y])\setminus K(a,e)$ и g из $M(b,e)\setminus[x]$, то для такой пары несмежных вершин получаем 3-лапу $\{y; f,g,d\}$. Противоречие.

(б) если f из $M(a,e)\setminus([y]\cup K(a,e))$ и g из $M(b,e)\setminus[x]$, то для такой пары несмежных вершин получаем $g\sim f'$, где f' — это вершина из $M(a,e)$, несмежная с вершиной f, причем $f'\sim d$. Но тогда получаем 3-лапу $\{f'; x,g,d\}$. Противоречие.

(в) если f из $M(a,e)\setminus([y]\cup K(a,e))$ и g из $M(b,e)\cap[x]$. Поскольку $M(d,e)$ — клика, то окрестности вершин d и y в подграфе $M(a,e)$ совпадают. Рассмотрим подграф $M(g,d)$: там лежат $M(d,e)$ и $K(b)$. Но $M(d,e)$ — клика, и получаем $|M(g,d)|\geq \nu+\hat{b}$; противоречие. Таким образом, случай 1 невозможен.

С л у ч а й 2: $M(c,e)$ — клика, а $M(d,e)$ не клика. Заметим, что $M(c,e)\cap(M(b,e)\setminus[x])$ пусто. Подграф $M(d,e)$ некликовый и, значит, существует пара несмежных вершин f и y':

(а) если f из $M(a,e)\cap[y]$ и y' из $M(b,e)\setminus[x]$. Если $M(b,e)\cap[c]$ не пусто, т. е. существует вершина g, то $g\sim f$, так как $M(x,y)$ — клика, и получаем 3-лапу $\{g; f,y',c\}$; противоречие. Следовательно, $M(b,e)\cap[c]$ пусто и поэтому $M(c,e)\subset M(a,e)$. Значит, число вершин в кликовом подграфе меньше, чем в некликовом. Противоречие.

(б) если f из $M(a,e)\setminus([y]\cup K(a,e))$ и y' из $M(b,e)\setminus[x]$. Если существует вершина g из $M(d,e)\cap M(b,e)\cap[x]$, то получаем 3-лапу $\{x; c,f,g\}$. Причем $g\not\sim f$, так как $g\sim f'$ и $M(x,y)$— клика, где f' — вершина из подграфа $M(a,e)$, несмежная с f. Значит, $M(d,e)\cap M(b,e)\cap[x]$ пусто. Но тогда в подграфе $M(b,x)$ содержится только $[x]\cap M(a,b)$ и $[c]\cap M(b,e)$, но по условию подграф $M(b,x)$ не является кликой. Противоречие. Следовательно, случай 2 невозможен. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Если вершина e из $\Gamma_2(a)\cap\Gamma_2(b)$, то либо она имеет некликовый μ-подграф с вершинами a и b, либо оба подграфа $[a]\cap[e]$ и $[b]\cap[e]$

являются кликами. В первом случае e — сильная вершина по определению, во втором — по лемме 21. Следовательно, все вершины из $\Gamma_2(a)\cap\Gamma_2(b)$ являются сильными.

Лемма 22 *Если a является сильной вершиной из Γ, то $\Gamma_3(a)$ — пустой граф.*

Доказательство. Пусть $\Gamma_3(a)$ не пусто, т. е. существует вершина $e \in \Gamma_3(a)$ и $afge$ — 3-путь. Пусть $g \sim b$. Вершина b смежна с f или с e, так как иначе получим 3-лапу $\{g; b, e, f\}$. Заметим, что по лемме 12 вершины b и e несмежны (если $b \sim e$, то $acbe$ — 3-путь и $[a] \cap [b]$ клика; противоречие). Тогда b смежна с f. Далее, $[a]\cap[g] \subseteq [b]$, иначе $[g]$ содержит b, e и вершину из $([a] \cap [g]) - [b]$ (образуется 3-лапа). Отсюда $[a] \cap [g] \subseteq [a] \cap [b]$, причем $[a] \cap [g]$ — клика, а подграф $[a] \cap [b]$ не является кликой. Получили противоречие с тем, что $\nu \geq \mu$.

Пусть $c \in \Gamma_2(e)$, т. е. существует вершина x именно из $\Gamma_2(a)$. Данная вершина x смежна с b, так как иначе образуется 3-лапа $\{c; a, b, x\}$. Противоречие, как и в предыдущем абзаце (в роли g теперь вершина x). Таким образом, c и d не лежат в $\Gamma_2(e)$. Вершина f смежна с c или с d, и без ограничения общности будем считать, что $f \sim c$. Следовательно, $c \in \Gamma_3(e)$. Пусть $x \in [b] \cap [e]$. Тогда $x \in \Gamma_2(a)$, и без ограничения общности $x \sim c$. Мы получили 3-путь $acxe$, в котором $x \sim b$. Значит, $b \notin \Gamma_2(e)$.

Если $g \in \Gamma_2(b)$, то существует вершина y из $[g]\cap[b]$ такая, что $y \in \Gamma_2(a)$. Так как вершина b находится на расстоянии большем 2 от e, то подграф $[b] \cap [g]$ — клика. Берем $z \in [a] \cap [g]$. По лемме 21 можно считать, что z, y — сильная пара из подграфа $[x]\cap[g]$, где $x \in [a]\cap[b]$. Вершина y не может быть сильной парой для a. Тогда $e \sim y$ (иначе $\{g; e, y, z\}$ — 3-лапа и $e \not\sim z$, поскольку $e \in \Gamma_3(a)$). Получили $y \in \Gamma_2(a) \cap [b]$. Возникает 3-путь $axye$, в котором $y \sim b$. Противоречие, как и в первом абзаце. Теперь рассмотрим $bcfg$ — 3-путь, причем $g \notin \Gamma_2(b) \cup b^{\perp}$, т. е. вершина g на расстоянии 3 от b. Противоречие с тем, что окрестность вершины f содержит a, которая образует сильную пару с вершиной b. Таким образом, $\Gamma_3(a)$ пусто. Лемма доказана.

Лемма 23 *Граф* Γ *имеет диаметр* 2.

Доказательство. Пусть Γ имеет диаметр больше 2 и вершины f, g находятся на расстоянии 3 друг от друга. По лемме 22 вершины f, g не являются сильными. Из замечания после леммы 21 следует, что $f, g \in x^\perp \cup y^\perp$ для любой сильной пары x, y. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $f \in ([a] \cap [c]) - ([b] \cup [d])$, $g \in ([b] \cap [d]) - ([a] \cup [c])$.

По лемме 22 имеем $\Gamma - (a^\perp \cup b^\perp) = \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$. Пусть $\Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$ не пусто и $e \in \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$. По лемме 21 вершина e сильная и,значит, e смежна точно с одной из вершин в $\{f, g\}$. Пусть e смежна с g. Если μ-подграф $[b] \cap [e]$ не является кликой, то он содержит сильную пару x, y и, значит, $[f] \cap [b] \cap [e]$ не пусто. Тогда f содержится в $x^\perp \cup y^\perp$. Противоречие с выбором f, так как $x^\perp \cup y^\perp = b^\perp \cup e^\perp$. Далее, μ-подграф $[a] \cap [e]$ не может быть кликой, поскольку в противном случае по лемме 21 вершина g будет сильной; противоречие. Так f как не является сильной вершиной, то μ-подграфы $[f] \cap [b]$ и $[f] \cap [e]$ являются кликами, причем вершина $c \in [f] \cap [b]$ не смежна с некоторой вершиной h из $[f] \cap [e]$. Заметим, что $d(h, b) = 2$. Действительно, если $h \in [a]$, то это следует из леммы 6. Если $h \in [e] - [a]$, то вершина h сильная и $d(h, b) = 2$ (по лемме 22). Теперь по лемме 21 вершина f — сильная вершина. Опять, по лемме 22 $d(f, g) = 2$. Противоречие с выбором вершин f, g.

Мы доказали, что $\Gamma_2(x) \cap \Gamma_2(y)$ пусто и, следовательно, $\Gamma = x^\perp \cup y^\perp$ для любой сильной пары x, y. Так как $[f] \cap [b]$ не содержит d, то f смежна с некоторой вершиной w из $[b] - [a]$. Так как $d(f, g) = 3$, то w не смежна с g. Заметим, что $[f] \cap [b]$ — клика; значит, wc — ребро. В то же время w не смежна с d, поскольку в противном случае wb — ребро из $([c] \cap [d]) - a^\perp$. По лемме 6 $w^\perp$ и $b^\perp$ совпадают вне $[a]$. Однако $w^\perp$ не содержит g из $b^\perp - [a]$. Противоречие.

Рассмотрим теперь 3-коклику $\{a, w, g\}$. Подграфы $[a] \cap [g]$ и $[w] \cap [g]$ являются кликами, так как вершина g не может быть сильной по лемме 22. Более того, μ-подграф $[w] \cap [g]$ содержится в $b^\perp - [a]$, так как иначе g — сильная, $\{x; a, w, g\}$ — 3-лапа. Если $[w] \cap [g]$ не содержится в $[d]$, то по лемме 19 вершина d из $[a] \cap [g]$ образует сильную пару с некоторой вершиной u из $([w] \cap [g]) - [d]$, u смежна с c или d, так как иначе $\{b; u, c, d\}$ — 3-лапа. Особый случай, когда $[d] \cap [w]$ и $[u] \cap [a]$ — некликовые подграфы, а $[d] \cap [u]$ — кликовый. При рассмотрении первой ситуации получаем следующее: вершина g является сильной. Противоречие с леммой 22. Значит, μ-подграф $[w] \cap [g]$ содержится в $(b^\perp - [a]) \cap [d]$.

Симметрично, μ-подграф $[a] \cap [g]$ не содержит вершину c, значит, g смежна с некоторой вершиной z из $[a] - [b]$. Так как $d(f, g) = 3$, то z не смежна с f. Подграф $[a] \cap [g]$ — клика, zd — ребро, и z не смежна с вершинами c, w.

Если $d(w, z) = 2$, то по лемме 21 вершина w из $[f] \cap [b]$ образует сильную пару с вершиной a из $([f] \cap [z]) - [w]$. Но тогда вершина f является сильной. Противоречие с леммой 22.

Следовательно, $d(w, z) = 3$. Как и выше, в этом случае μ-подграф $[w] \cap [g]$ содержится в $[c]$. Но тогда μ-подграф $[w] \cap [g]$ содержится в μ-подграфе $[c] \cap [d]$, и, значит, $[w] \cap [g] = [c] \cap [d]$. Противоречие с тем, что $[w] \cap [g]$ не содержит a из $[c] \cap [d]$.

Теперь рассмотрим особый случай. Поскольку $[d] \cap [w]$ не клика, то существует вершина $t \in [d]$ такая, что $t \not\sim b$. При этом $t \sim f$, так как иначе $\{w; f, b, t\}$ — 3-лапа, $c \sim u$, $t \not\sim u$, поскольку в противном случае получаем 3-лапу $\{t; u, f, d\}$. Заметим, что подграф $[a] \cap [w]$ кликовый, иначе a, w — сильная пара и, следовательно, $\Gamma = a^\perp \cup w^\perp$, но $g \in \Gamma$ и $g \notin a^\perp \cup w^\perp$. Таким образом, $c \sim t$. Получаем четырехугольник $ctdb$: $c^\perp \cup d^\perp = t^\perp \cup b^\perp = a^\perp \cup b^\perp$, т. е. окрестности вершин t и a совпадают вне $b^\perp$. Число вершин в подграфе $[a] \cap [b]$ равно μ. Пусть $|[a] \cap [b] \cap [g]| = \alpha$, тогда $|[a] \cap [b] \cap [w]| = \mu - \alpha$.

Поскольку $t \not\sim b$, то $|[t] \cap [b]| = \mu$. С другой стороны, $|[t] \cap [b]| = |[a] \cap [b] \cap [g]| + |[a] \cap [b] \cap [w]| + |\{w\}| = \alpha + (\mu - \alpha) + 1$. Противоречие. Лемма доказана.

До конца статьи будем предполагать, что граф Γ является контрпримером к теореме 1, содержит наименьшее число вершин и четырехугольник $acbd$.

Лемма 24 *Граф* Γ *не содержит* 4*-коклик.*

Доказательство. Пусть $\{w, x, y, z\}$ является 4-кокликой из Γ и $u \in \{w, x, y, z\}$. По леммам 5 и 23 подграф $\Gamma - u^{\perp}$ является связным подграфом из Γ, содержащим 3-коклику. Следовательно, он удовлетворяет условию теоремы 1. Так как Γ — контрпример с наименьшим числом вершин, то $\Gamma - u^{\perp}$ удовлетворяет заключению теоремы 1. Если $\Gamma - u^{\perp}$ — граф Тервиллигера, то по лемме 20 он имеет диаметр больше двух. Наш граф Γ имеет диаметр два. Все μ-подграфы из Γ для вершин из $\Gamma - u^{\perp}$ лежат в $\Gamma - u^{\perp}$. Поэтому $\Gamma - u^{\perp}$ имеет диаметр два. Значит, подграф $\Gamma - u^{\perp}$ содержит четырехугольник. Все такие графы из заключения леммы 3 являются регулярными графами.

Далее, Γ не содержит 3-лап, поэтому любая вершина из Γ не может быть смежна более чем с двумя вершинами из 4-коклики. Таким образом, эта вершина принадлежит пересечению антиокрестностей по крайней мере двух вершин из $\{w, x, y, z\}$. Из того, что Γ является связным графом, следует, что валентности всех вершин совпадают. По лемме 1 граф Γ не является контрпримером к теореме 1. Лемма доказана.

Лемма 25 *Если* $e \in \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$*, то граф* $M(a, e)$ *имеет непустое пересечение с* $[c]$ *и* $[d]$*.*

Доказательство.

Допустим, что $\Delta = M(a, e) \cup M(b, e)$. Заметим,что по лемме 5 $c^{\perp} \subseteq a^{\perp} \cup b^{\perp}$, следовательно $M(c, e) \subseteq a^{\perp} \cup b^{\perp}$ и $M(c, e) \subset e^{\perp}$, значит $M(c, e) \subseteq \Delta$. Аналогично можно показать, что $M(d, e) \subseteq \Delta$. С другой стороны, из симметрии четырехугольника $abcd$ получаем, что $\Delta \subseteq M(c, e) \cup M(d, e)$, следовательно,

$\Delta = M(c,e) \cup M(d,e)$. Если $M(a,e)$ не является кликой, то не ограничивая общности рассуждений можно положить, что для несмежных вершин x_1, x_2 из $M(a,e)$ вершина c смежна, например, с x_1, вершина d смежна с x_2. По лемме 7 подграфы $[a] \cap \Delta$ и $\Delta - [a]$ являются кликами. Если $f \in [a] \cap \Delta$, то по лемме 21 в $\Delta - [a] = [b] \cap [e]$ найдется не смежная с f вершина u такая, что $[f] \cap [u]$ содержит вершину z из $[a] \cap [b]$.

Так как подграф $[f] \cap [u]$ содержит вершину z из $[a] \cap [b]$, то по лемме 6 вершина z лежит в $[c] \cap [d]$. Так как $[a] \subset c^{\perp} \cup d^{\perp}$, то по лемме 13 подграф $a^{\perp} - ([b] \cup [e])$ содержится в $[x]$ для любой вершины x из $([a] \cap \Delta) \cup \{z, c\}$. Симметрично, подграф $b^{\perp} - ([a] \cup [e])$ содержится в $[y]$ для любой вершины y из $([b] \cap \Delta) \cup \{z, d\}$.

По лемме 24 подграф $\Gamma - (a^{\perp} \cup b^{\perp})$ является кликой и, следовательно, $\Gamma - e^{\perp}$ содержится в $a^{\perp} \cup b^{\perp}$. Подграф $[a] \cap [e]$ лежит в $(a^{\perp} - [b])^{\perp}$, подграф $[b] \cap [e]$ лежит в $(b^{\perp} - [a])^{\perp}$, ни одна вершина из $[a] \cap [b]$ не смежна ни с одной вершиной из $\Gamma - (a^{\perp} \cup b^{\perp})$ и ни одна вершина из $\Gamma - e^{\perp}$ не смежна ни с одной вершиной из $e^{\perp} - ([a] \cup [b])$. Значит, $e^{\perp} = K(e) \cup \Delta$.

Теперь для любой вершины x из $[a] \cap \Delta$ имеем $x^{\perp} = K(e) \cup (a^{\perp} - [b]) \cup ([x] \cap [b])$. Для любой вершины y из $[b] \cap \Delta$ имеем $y^{\perp} = K(e) \cup (b^{\perp} - [a]) \cup ([y] \cap [a])$. Отсюда $k_x = k_a + \hat{e}$ и $k_y = k_b + \hat{e}$.

Пусть $v = |\Gamma|$. Тогда, с одной стороны, $v = 2 + k_a + k_b - \mu + \hat{e}$. С другой стороны $|z^{\perp} \cup e^{\perp}| = 2 + k_f + k_u - \mu = 2 + (k_a + \hat{e}) + (k_b + \hat{e}) - \mu > v$, противоречие. Лемма доказана.

Для вершин x, y находящихся на расстоянии 2 в Γ, положим $\Delta(x,y) = K(x) \cup K(y) \cup ([x] \cap [y])$. Пусть Δ — подграф из Γ, что $K(x) \subseteq \Delta$ для любой вершины $x \in \Delta$, а $\bar{\Delta}$ — фактор-граф, полученный из Δ так, что $\bar{x} = K(x)$ для $x \in \Delta$. Тогда Δ назовем ядерным расширением $\bar{\Delta}$. Через $\mathcal{K}$ обозначим класс графов, состоящий из 2-коклики и полных многодольных графов с долями порядка 2.

Лемма 26 *Пусть* $e \in \Gamma - (a^\perp \cup b^\perp)$*. Тогда:*

(1) *если* xy *— ребро из* $[a]\cap[b]-([a]\cap[b])^\perp$ *и* $[x]\cap[e]=[y]\cap[e]$*, то* $x^\perp = y^\perp$*;*

(2) *граф* $\Delta(a,b) - ([a]\cap[b])^\perp$ *является ядерным расширением графа из класса* $\mathcal{K}$*;*

(3) $\Delta(a,b)=\Delta(c,d)$ *и* $\hat{c}+\hat{d}=\hat{a}+\hat{b}$ *для любых несмежных вершин* c,d *из* $[a]\cap[b]$*.*

Доказательство.

Пусть выполнены условия пункта (1) леммы. Для $w \in [x]\cap[e]$ получим равенство $[w]\cap x^\perp = [w]\cap y^\perp$, в противном случае, окрестность вершины w содержит 3-коклику, например, вершины e, y и вершину из $[x]-[y]$. По лемме 25 подграф $[x]\cap[e]$ имеет непустое пересечение с $[a]$ и $[b]$. Отсюда, если $x^\perp \neq y^\perp$, то существует вершина u из $[x]-y^\perp$, которая не смежна ни с одной вершиной из $[x]\cap[e]$. Понятно, что $u\in[a]\cap[b]$, иначе, например, если $u\in[a]-[b]$, то $\{x;u,w,b\}$ — 3-лапа для некоторой вершины w из $([x]\cap[e])-[b]$. Так как вершина u не смежна с вершиной y, то $M(u,e)\cap M(y,e)=\varnothing$ и $M(a,e)\cup M(b,e)=M(x,e)\cup M(u,e)$.

Пусть вершина z — не смежная с x вершина из $[a]\cap[b]$. Так как z не смежна с x, то $M(z,e)\cap M(x,e)=\varnothing$ и $M(a,e)\cup M(b,e)=M(x,e)\cap M(z,e)$. Отсюда $M(u,e)=M(z,e)$, значит вершина u смежна с вершиной z. Пусть вершина z смежна с y. Тогда по лемме 25 подграф $M(y,e)$ пересекает $[x]$ и $[z]$. Противоречие с условием $[x]\cap[e]=[y]\cap[e]$. Тогда вершина z не смежна с y. Иначе по лемме 10 графы $x^\perp$ и $y^\perp$ совпадают вне $[a]\cap[b]\cap[z]$. Итак, $x^\perp=y^\perp$. Покажем, что $x^\perp$ и $y^\perp$ совпадают в $[a]\cap[b]\cap[z]$. Так как $M(x,z)$ и $M(y,z)$ содержат не смежные вершины a и b, то число вершин в каждом из графов равно μ. Так как вершина $u\in M(x,z)$ и $u\notin M(y,z)$, то существует вершина h такая, что $h\notin M(x,z)$ и $h\in M(y,z)$. Если вершина h смежна с вершиной u, то мы получим четырехугольник $xuhy$, что противоречит лемме 25. Тогда h не смежна с u и мы имеем пятиугольник $xuzhy$. Теперь $[h]\cap[e]=[x]\cap[e]$, что противоречит выбору вершины h. Итак, $x^\perp = y^\perp$ и утверждение (1) леммы доказано.

Пусть $x \in [a] \cap [b] - ([a] \cap [b])^\perp$ и yz — ребро из $([a] \cap [b]) - x^\perp$. По лемме 6 $[y] \cap [e] = [z] \cap [e]$ и из пункта (1) следует, что $z^\perp = y^\perp$. Это влечет утверждение пункта (2).

Из пункта (2) следует равенство $\Delta(a,b) - ([a] \cap [b])^\perp = \Delta(c,d) - ([c] \cap [d])^\perp$ для любых несмежных вершин c, d из $[a] \cap [b]$. Пусть $z \in ([a] \cap [b])^\perp$ и $z \notin ([c] \cap [d])^\perp$ для некоторой пары несмежных вершин c, d из $[a] \cap [b]$. Тогда, без ограничения общности рассуждений, можно считать, что найдется вершина x из $[a] - (b^\perp \cup e^\perp)$, которая смежна с c, d и не смежна с z. Из равенства $|[a] \cap [b]| = |[x] \cap [b]|$ следует, что в $[b] - (a^\perp \cup e^\perp)$ есть вершина y, смежная с x. Без потери общности рассуждений можно считать, что y смежна с вершиной c. Из равенств $a^\perp \cup b^\perp = c^\perp \cup d^\perp$ и $c^\perp \cup d^\perp = x^\perp \cup z^\perp$ следует, что $y \sim z$. Если $y \sim d$, то yz — ребро из μ-подграфа $[c] \cap [d]$ вне $x^\perp$. Получили, что $y^\perp = z^\perp$. Противоречие, так как y не смежна с вершиной a. Если $y \not\sim d$, то yc — ребро из μ-подграфа $[x] \cap [b]$ вне $d^\perp$. Опять имеем $y^\perp = c^\perp$. Противоречие. Значит, $\Delta(a,b) = \Delta(c,d)$. Теперь $|\Delta(a,b)| = \hat{a} + \hat{b} + \mu$, $|\Delta(c,d)| = \hat{c} + \hat{d} + \mu$ и справедливо последнее равенство. Лемма доказана.

Для подграфа χ из Γ вершину x из $\Gamma - \chi$, смежную с α вершинами из χ, назовем α-точкой для χ.

Лемма 27 *Пусть f, g — несмежные вершины из $[a] \cap [e]$ и cf, dg — ребра. Тогда:*

(1) если $[d] \cap [f]$ содержит γ вершин, а $[c] \cap [g]$ содержит δ вершин из $[b] \cap [e]$, то $\gamma + \delta = \hat{b} + \hat{e}$;

(2) либо $[c] \cap [g] \cap [b] \cap [e] = K(u)$ и $[d] \cap [f] \cap [b] \cap [e] = K(w)$ для некоторых несмежных вершин $u, w \in [b] \cap [e]$, либо один из подграфов $[c] \cap [g]$, $[d] \cap [f]$ не пересекает $[b] \cap [e]$, а второй пересекает по подграфу из $K([b] \cap [e])$.

Доказательство.

Рассмотрим подграфы $[c] \cap [g]$ и $[d] \cap [f]$. Если x — вершина из $[c] \cap [g]$ такая что $x^\perp \neq a^\perp$ и $x \in [a] \cap ([b] \cap [e])$, то $\{x, d, f\}$ является 3-кокликой из $[a]$. Противоречие. Значит, $[a] \cap [c] \cap [g]$ содержится в $([a] \cap [b]) \cup ([a] \cap [e])$. Аналогично, $[a] \cap [d] \cap [f]$ содержится в $([a] \cap [b]) \cup ([a] \cap [e])$.

Пусть вершина c является α-точкой для $[b] \cap [e]$, а f является β-точкой для $[b] \cap [e]$. Поскольку $|M(c,e)| + |M(d,e)| = |M(a,e)| + |M(b,e)| = \mu + |M(b,e)|$, то для пары c, d имеем: если $M(b,e)$ — кликовый подграф, то один из графов $M(c,e)$ или $M(d,e)$ также кликовый. Аналогично, для $M(b,f)$ и $M(b,g)$

Посчитаем число вершин в подграфе $M(d,f)$. По лемме 26 любой некликовый μ-граф является ядерным расширением графа из класса $\mathcal{K}$. Отсюда $M(d,f)$ содержит все вершины из $M(b,f)$ кроме β вершин из $M(b,e)$ и вершин из $K(c)$. Аналогично, $M(d,f)$ содержит все вершины из $M(d,e)$, кроме $|M(b,e)| - \alpha$ вершин из $M(b,e)$ и вершин из $K(g)$. Таким образом, $|M(d,f)| = \hat{a} + \gamma + |M(b,f)| - \beta - \hat{c} + |M(d,e)| - |M(b,e)| + \alpha - \hat{g}$.

Симметрично, подграф $M(c,g)$ содержит вершин: $|M(c,g)| = \hat{a} + \delta + \mu - |M(b,f)| + \beta - \hat{d} + \mu - |M(d,e)| + |M(b,e)| - \alpha - \hat{f}$. Учитывая лемму 26 и сложив полученные равенства, имеем $|M(d,f)| + |M(c,g)| = 2\hat{a} + \gamma + \delta + 2\mu - \hat{c} - \hat{d} - \hat{f} - \hat{g} = 2\hat{a} + \gamma + \delta + 2\mu - \hat{a} - \hat{b} - \hat{a} - \hat{e} = \gamma + \delta + 2\mu - \hat{b} - \hat{e}$.

Пусть $|M(c,e)| = \nu, |M(d,e)| = \mu, |M(b,e)| = \nu$, $|M(b,f)| = \nu, |M(b,g)| = \mu$, $|[d] \cap M(a,e)| = \mu - \nu + \alpha$, $|[g] \cap M(a,b)| = \mu - \nu + \beta$. Поскольку $M(b,f)$, $M(c,e)$ — клики, то $\gamma = 0$ и $\delta = 0$ и получаем $|M(d,f)| + |M(c,g)| = 2\mu - \hat{b} - \hat{e} < 2\mu$. Но эти подграфы не пусты. Противоречие. Значит рассматриваемый случай невозможен.

Пусть $M(d,e), M(b,e), M(b,g)$ — клики, $M(c,e), M(b,f)$ не являются кликами, а $|[d] \cap M(a,e)| = \alpha$, $|[g] \cap M(a,b)| = \beta$. По лемме 15 всякая вершина из $M(c,g) \cap M(b,e)$ не смежна с вершинами из $M(d,f) \cap M(b,e)$. Но $M(b,e)$ — клика. Значит, либо $\gamma = 0$ и $\delta \neq 0$, либо $\delta = 0$ и $\gamma \neq 0$. Пусть $\gamma = 0$ и $\delta \neq 0$.

Следовательно, $M(c,g)$ — некликовый подграф и $\delta = \alpha - \beta$. Ввиду равенств $\hat{a} + \hat{e} = \hat{f} + \hat{g}$ и $|[g] \cap M(a,b)| = \beta = |[f] \cap M(b,e)|$ имеем $\hat{a} = \hat{f}$. Но тогда $\mu = |M(c,g)| = \hat{a} + \delta + \beta - \hat{d} + \mu - \alpha - \hat{f} = \mu - \hat{d} < \mu$. Противоречие.

Пусть теперь $\delta = 0$ и, следовательно, $\gamma \neq 0$. Значит, подграф $M(d,f)$ — некликовый и $\gamma = \beta - \alpha$. Ввиду равенств $\hat{a} + \hat{b} = \hat{c} + \hat{d}$ и $|[d] \cap M(a,e)| = \alpha = |[c] \cap M(b,e)|$ имеем $\hat{a} = \hat{c}$. Но тогда $\mu = |M(d,f))| = \hat{a} + \gamma + \mu - \beta - \hat{c} + \alpha - \hat{g} = \mu - \hat{g} < \mu$. Получили противоречие и поэтому рассматриваемый случай тоже невозможен.

Пусть $M(d,e), M(b,e), M(b,f)$ — клики, $M(c,e), M(b,g)$ не являются кликами, а $|[d] \cap M(a,e)| = \alpha$, $|[g] \cap M(a,b)| = \mu - \nu + \beta$. Обозначим через d_j представителей ядер из $M(a,b)$, смежных с g, а через c_j — представителей ядер, смежных с f, где $j = 1, \ldots, m$. Пусть $c = c_1, d = d_1$. Аналогично, обозначим через f_i, g_i представителей ядер в долях μ-подграфа $M(a,e)$, где $i = 1, \ldots, k$, причем $f = f_1$, $g = g_1$. Пусть t — вершина из $M(c,f) \cap M(b,e)$, p — вершина из $M(d,g) \cap M(b,e)$ и s — из $M(c,g) \cap M(b,e)$, x и x' — вершины из $K(a,b)$, смежные с f и g соответственно, а y и y' — из $K(a,e)$, смежные с c и d соответственно. В $M(c,g) \cap M(b,e)$ всего $\delta = \alpha - \beta$ вершин. Заметим, что $\hat{c_j} = \hat{a} = \hat{g_i}$ и $\hat{d_j} = \hat{b} = \hat{e} = \hat{f_i}$. Кроме того, $\gamma = 0$, так как $M(d,e)$ — клика, а вот $M(c,g)$ не является кликой, поскольку $a \not\sim s$. Значит, $|M(d,f)| = \delta + \mu - \hat{b} - \hat{e}$. Если μ-подграф $M(d,f)$ — некликовый, то $\delta = \hat{b} + \hat{e}$ и, значит, лемма верна. Пусть теперь $M(d,f)$ — клика. Тогда $\delta = \nu - \mu + \hat{b} + \hat{e}$. Из равенства $\nu = |M(d,f)| = \hat{a} + \nu - \beta - \hat{c} + \alpha - \hat{g}$ получаем $\hat{a} = \alpha - \beta$. Теперь уточним смежности для имеющихся вершин. Поскольку мы предположили, что $M(d,f)$ — клика, то $a \sim x \sim c_2, \ldots, c_m \sim y' \sim g_2, \ldots, g_k$. Вершина s смежна с c_1 и g_1, с $y, f_2, \ldots, f_k$ (иначе 3-лапа $\{g_1; d_1, s, y$ или $f_2, \ldots, f_k\}$) и с $x', d_2, \ldots, d_m$ (иначе 3-лапа $\{c_1; f_1, s, x'$ или $d_2, \ldots, d_m\}$). Если вершина t смежна с некоторой вершиной из $[c] \cap M(a,e)$(без ограничения общности с f_2), то $t \sim y', g_3, \ldots, g_k$, иначе 3-лапа $\{f_2; d_2, t, y'$ или $g_3, \ldots, g_k\}$. Пусть $m, k \geq 2$.

Рассмотрим подграф $M(g_1,t)$: он не является кликой, так как $s\not\sim g_2,\dots,g_k$, причем $M(g_1,t)\cap M(a,b)=\varnothing$. Тогда $\mu=|M(g_1,t)|=\alpha-\beta+\nu-\alpha+\hat{e}+|M(g_1,t)\cap M(a,e)|=\nu-\beta+\hat{e}+\begin{cases}\alpha-\hat{g}_1-\hat{g}_2+\hat{f}_2 & \text{, если } t\sim f_2\\ \alpha-\hat{g}_1 & \text{, если } t\not\sim f_2\end{cases}=$
$\begin{cases}\nu-\beta+\hat{e}+\alpha-2\hat{a}+\hat{e}\\ \nu-\beta+\hat{e}+\alpha-2\hat{a}+\hat{a}\end{cases}=\begin{cases}\mu\\ \nu+\hat{e}\end{cases}$

Значит вершина t смежна с f_2 и $y',g_3,\dots,g_k$.

Ввиду симметрии аналогично для вершины p можно сформулировать следующее: если p смежна с d_2, то $p\sim x,c_3,\dots,c_m$ и, рассматривая некликовый подграф $M(c_1,p)$, получаем $p\sim d_2,x,c_3,\dots,c_m$.

Так как $a\not\sim t$, то $\mu=|M(c_2,f_2)|=\hat{a}+\beta+\alpha-\hat{g}_1-\hat{g}_2+\hat{f}_1+\mu-\nu+\beta-\hat{d}_1-\hat{d}_2+\hat{c}_1=2\beta+\alpha+\mu-\nu-\hat{b}=3\beta+\hat{b}$. С другой стороны, $a\not\sim p$ и $\mu=|M(d_2,g_2)|=\hat{a}+\nu-\alpha+\nu-\beta-\hat{c}_1-\hat{c}_2+\hat{d}_1+\mu-\alpha-\hat{f}_1-\hat{f}_2+\hat{g}_1=3(\mu-\beta)-5\hat{b}$. Тогда $\beta=\hat{b}$. Заметим, что $\alpha=|[d]\cap K(a,e)|+\hat{g}_1+\ldots+\hat{g}_k=|[d]\cap K(a,e)|+k\cdot\hat{a}$. Следовательно, $\alpha-\beta=|[d]\cap K(a,e)|+k\cdot\hat{a}-\hat{b}$. Но $\alpha-\beta=\hat{a}$ и потому $0=|[d]\cap K(a,e)|+(k-2)\hat{a}+(\hat{a}-\hat{b})$, где первые два слагаемых неотрицательны при $k\geq 2$, а $\hat{a}-\hat{b}=\nu-\mu+\hat{e}>0$. Противоречие.

Отсюда $k=1$ и $|M(a,t)|=\nu-\beta+\alpha-\hat{g}+\hat{f}=\nu+\hat{f}>\nu$ — противоречие. Значит, $M(d,f)$ не может быть кликой и в этом случае лемма верна.

Случай, когда $M(c,e),M(b,e),M(b,g)$ — клики, $M(d,e),M(b,f)$ не являются кликами, а $|[d]\cap M(a,e)|=\mu-\nu+\alpha$, $|[g]\cap M(a,b)|=\beta$, рассматривается аналогично ввиду симметричности.

Наконец, рассмотрим случай $M(d,e),M(b,e),M(c,e),M(b,f),M(b,g)$ не являются кликами, $|[d]\cap M(a,e)|=\alpha$, $|[g]\cap M(a,b)|=\beta$ при $\gamma=0$ или $\delta=0$. Верно следующее: $\hat{a}=\hat{c}_j,\hat{a}=\hat{f}_i,\hat{b}=\hat{d}_j,\hat{e}=\hat{g}_i$. Пусть $\gamma=0$ и, значит, $\delta\neq 0$, $|M(c,g)|=\mu$ и получаем $|M(d,f)|=\delta+\mu-\hat{b}-\hat{e}$. Если $|M(d,f)|=\mu$, то $\delta=\hat{b}+\hat{e}$ и лемма верна. Пусть теперь $|M(d,f)|=\nu$. Тогда $\alpha-\beta=\delta=\nu-\mu+\hat{b}+\hat{e}$. Рассмотрим 3-коклику $\{d,f,s\}$: вершина b не смежна с g и поэтому $|M(d,s)|=\mu$, а $M(f,s)$ — некликовый подграф, так как $e\not\sim c$. Получаем $\hat{d}+\hat{f}+\hat{s}+\nu+2\mu=\hat{a}+\hat{b}+\hat{e}+3\mu$ и $\hat{s}=\mu-\nu+\hat{e}$. Но вершина s — произвольная вершина из $M(c,g) \cap M(b,e)$, а таких $\alpha - \beta = \nu - \mu + \hat{b} + \hat{e}$ штук. Значит $\hat{s} \geq \nu - \mu + \hat{b} + \hat{e}$ и, следовательно, $0 \geq 2(\nu - \mu) + \hat{b}$. Получили противоречие, так как первое слагаемое в правой части неравенства неотрицательно, а второе — строго положительно. Тогда подграф $M(d,f)$ не может быть кликой и лемма верна. Случай $\delta = 0$ рассматривается аналогично ввиду симметрии. Лемма доказана.

1.4 Исключительные тройки в графах без 3-лап с ограничениями на их μ-подграфы.

Граф Γ — минимальный контрпример к теореме 1 и по леммам 23, 24 граф Γ имеет диаметр 2 и не содержит 4-коклик. Далее, мы хотим доказать,что $\Gamma = a^{\perp} \cup b^{\perp}$ для любой сильной пары вершин a, b из Γ. Предположим противное и назовем тройку вершин $\{x, y, z\}$ из Γ особой, если $\{x, y\}$ — сильная пара и $z \notin x^{\perp} \cup y^{\perp}$. Для 3-коклики $\{x, y, z\}$ из Γ положим $\Sigma(x, y, z) = \Delta(x, y) \cup \Delta(x, z) \cup \Delta(y, z)$, где $\Delta(u, w) = K(u) \cup K(w) \cup ([u] \cap [w])$, а вершины $u, w \in \{x, y, z\}$. Особую тройку $\{x, y, z\}$ назовем исключительной, если $\Gamma = \Sigma(x, y, z)$. В леммах 29-33 предполагается, что $\{a, b, e\}$ — исключительная тройка из Γ и c, d — несмежные вершины из $[a] \cap [b]$. Очевидно,что если $\{a, b, e\}$ — исключительная тройка из Γ, то и $\{b, a, e\}$ является исключительной тройкой из Γ.

Лемма 28 *Пусть $\{x, y, z\}$ является 3-кокликой из Γ, u — произвольная вершина из $K([x] \cap [z])$, а w — произвольная вершина из $K([y] \cap [z])$. Если вершина u не смежна с вершиной w, то $|M(x, y)| = \nu$ и выполнено одно из следующих условий:*

(a) $|M(x, w)| = \mu, |M(u, y)| = \mu, |M(u, w)| = \mu$;

(b) $M(u, w)$ — клика, а один из μ - графов $M(x, w), M(u, y)$ не является кликой.

Доказательство.

Пусть вершина u не смежна с w. Обозначим $|[u] \cap M(y,z)| = \alpha$, $|[w] \cap M(x,z)| = \beta$ и $|M(x,y) \cap M(u,w)| = \gamma$. Тогда $|M(u,w)| = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, где $\delta = |M(u,w) - (x^{\perp} \cup y^{\perp})|$ и $\delta \geq 1$. Рассмотрим возможные варианты мощностей вышеупомянутых μ-подграфов и подсчитаем число вершин в подграфах $M(x,y)$ и $M(u,w)$.

Случай 1: $\begin{cases} |M(x,y)| = \mu \geq (\mu - \alpha) + (\mu - \beta) - \gamma \\ |M(u,w)| = \mu = \alpha + \beta + \gamma + \delta \end{cases}$

Отсюда $\delta = 0$. Противоречие.

Случай 2: $\begin{cases} |M(x,y)| = \mu \geq (\nu - \alpha) + (\nu - \beta) - \gamma \\ |M(u,w)| = \mu = \alpha + \beta + \gamma + \delta \end{cases}$

Значит $2\mu \geq 2\nu + \delta$. Противоречие с условием $\nu \geq \mu$.

Случай 3: $\begin{cases} |M(x,y)| = \mu \geq (\nu - \alpha) + (\nu - \beta) - \gamma \\ |M(u,w)| = \nu = \alpha + \beta + \gamma + \delta \end{cases}$

Отсюда $\mu \geq \nu + \delta$. Противоречие с условием $\nu \geq \mu$.

Случай 4: $\begin{cases} |M(x,y)| = \mu \geq (\nu - \alpha) + (\mu - \beta) - \gamma \\ |M(u,w)| = \mu = \alpha + \beta + \gamma + \delta \end{cases}$

Отсюда $\mu \geq \nu + \delta$, что противоречит условию $\nu \geq \mu$.

Случай 5: $\begin{cases} |M(x,y)| = \mu \geq (\nu - \alpha) + (\mu - \beta) - \gamma \\ |M(u,w)| = \nu = \alpha + \beta + \gamma + \delta \end{cases}$

Следовательно, $\delta = 0$. Противоречие.

Случай 6: $\begin{cases} |M(x,y)| = \mu \geq (\mu - \alpha) + (\nu - \beta) - \gamma \\ |M(u,w)| = \mu = \alpha + \beta + \gamma + \delta \end{cases}$

Тогда $\mu \geq \nu + \delta$. Противоречие с условием $\nu \geq \mu$.

Случай 7: $\begin{cases} |M(x,y)| = \mu \geq (\mu - \alpha) + (\nu - \beta) - \gamma \\ |M(u,w)| = \nu = \alpha + \beta + \gamma + \delta \end{cases}$

Получаем $\delta = 0$. Противоречие.

Случай 8: $\begin{cases} |M(x,y)| = \mu \geq (\mu - \alpha) + (\mu - \beta) - \gamma \\ |M(u,w)| = \nu = \alpha + \beta + \gamma + \delta \end{cases}$

Отсюда находим $\mu \geq \alpha + \beta + \gamma$, $\nu = \mu + \delta$.

Случай 9: $\begin{cases} |M(x,y)| = \nu \geq (\nu - \alpha) + (\mu - \beta) - \gamma \\ |M(u,w)| = \mu = \alpha + \beta + \gamma + \delta \end{cases}$

Отсюда $\delta = 0$. Противоречие.

Случай 10: $\begin{cases} |M(x,y)| = \nu \geq (\nu - \alpha) + (\mu - \beta) - \gamma \\ |M(u,w)| = \mu = \alpha + \beta + \gamma + \delta \end{cases}$

Значит $\delta = 0$. Противоречие.

Случай 11: $\begin{cases} |M(x,y)| = \nu \geq (\nu - \alpha) + (\nu - \beta) - \gamma \\ |M(u,w)| = \mu = \alpha + \beta + \gamma + \delta \end{cases}$

Получаем $\mu \geq \nu + \delta$. Это противоречит условию $\nu \geq \mu$.

Случай 12: $\begin{cases} |M(x,y)| = \nu \geq (\nu-\alpha)+(\nu-\beta)-\gamma \\ |M(u,w)| = \nu = \alpha+\beta+\gamma+\delta \end{cases}$

Следовательно, $\delta = 0$. Противоречие.

Случай 13: $\begin{cases} |M(x,y)| = \nu \geq (\mu-\alpha)+(\mu-\beta)-\gamma \\ |M(u,w)| = \mu = \alpha+\beta+\gamma+\delta \end{cases}$

Отсюда $\nu \geq \mu + \delta$.

Случай 14: $\begin{cases} |M(x,y)| = \nu \geq (\mu-\alpha)+(\mu-\beta)-\gamma \\ |M(u,w)| = \nu = \alpha+\beta+\gamma+\delta \end{cases}$

Получаем $2\nu \geq 2\mu + \delta$.

Случай 15: $\begin{cases} |M(x,y)| = \nu \geq (\nu-\alpha)+(\mu-\beta)-\gamma \\ |M(u,w)| = \nu = \alpha+\beta+\gamma+\delta \end{cases}$

Значит $\nu \geq \mu + \delta$.

Случай 16: $\begin{cases} |M(x,y)| = \nu \geq (\mu-\alpha)+(\nu-\beta)-\gamma \\ |M(u,w)| = \nu = \alpha+\beta+\gamma+\delta \end{cases}$

Тогда $\nu \geq \mu + \delta$.

Таким образом, в случаях 1-7 и 9-12 пришли к противоречию. Значит, $M(x,y) \not\subseteq u^{\perp} \cup w^{\perp}$. Тогда существует вершина $f \in M(x,y) \setminus (u^{\perp} \cup w^{\perp})$.

По лемме 19 либо $M(u,w)$ содержит вершину $g \in M(x,y)$, либо $M(u,y)$ и $M(x,w)$ — не клики, а $M(u,w)$ — клика (но это случаи 8 и 14). Значит существует вершина $g \in M(u,w) \cap M(x,y)$. Заметим, что вершина g не смежна с вершиной f, иначе получаем 3-лапу $\{g; u, w, f\}$. Подграф $M(g,z)$ содержит несмежные вершины u, w и значит он не является кликой. Следовательно g, z — сильная пара; $f \notin g^{\perp} \cup z^{\perp}$. Отсюда $\{g, z, f\}$ — особая тройка. По лемме 26 $\Delta(z,g) = \Delta(u,w)$, причем $\Delta(z,g) \subseteq \Sigma$. Получаем $\Delta(u,w) \subseteq \Sigma$. Далее заметим, что $\Sigma = u^{\perp} \cup y^{\perp}$ и $\Sigma = x^{\perp} \cup w^{\perp}$. Если обозначить через s_x валентность вершины x, то $|\Sigma| = s_u + s_y + 2 - |M(u,y)| = s_x + s_w + 2 - |M(x,w)|$. Так как $M(u,w) \subseteq \Sigma$, то $|\Sigma| > s_u + s_w + 2 - |M(u,w)|$. Кроме того, $|\Sigma| > s_x + s_y + 2 - |M(x,y)|$. С одной стороны $2|\Sigma| = s_u + s_w + s_x + s_y + 4 - |M(u,y)| - |M(x,w)|$, с другой стороны $2|\Sigma| > s_u + s_w + s_x + s_y + 4 - |M(u,w)| - |M(x,y)|$. Получаем $-|M(u,y)| - |M(x,w)| > -|M(u,w)| - |M(x,y)|$. В рассматриваемых случаях 1-7 и 9-12 данное неравенство не выполняется. Итак, в случаях 1-7 и 9-12 вершина u смежна с w, а в случаях вида 8, 13-16 они не смежны.

Рассмотрим теперь более подробно случаи 8 и 13-16.

Случай 8. Пусть существует пара несмежных вершин u, w таких, что подграфы $M(x,y), M(x,w), M(u,y)$ — некликовые, а $M(u,w)$ — кликовый подграф. Аналогично лемме 21 среди всех пар, удовлетворяющих условию 8 выберем такую, что вершина u смежна с наибольшим числом вершин в подграфе $[y] \cap [z]$, то есть $|[u] \cap M(y,z)| = max|[u'] \cap M(y,z)|$ для всех u' из $K(x,z)$.

Заметим, что подграфы $M(x,z)$ и $M(y,z)$ не могут быть кликовыми, так как иначе $\mu = \beta$ или $\mu = \alpha$.

Пусть теперь $M(x,z)$ и $M(y,z)$ не являются кликами и предположим, что в подграфе $M(x,y)$ существует вершина t несмежная с вершинами u и w. Тогда $[t] \cap [u] \cap M(y,z)$ и $[t] \cap [w] \cap M(x,z)$ пусты. Поскольку число вершин в подграфе $M(x,y)$ равно μ, то $\mu = \mu - \alpha + \mu - \beta + |M(x,y) \setminus (u^{\perp} \cup w^{\perp})|$ и $|M(t,z)| \leq (\mu-\alpha-1)+(\mu-\beta-1) = \mu-\alpha+\mu-\beta-2 = \mu-|M(x,y)\setminus(u^{\perp} \cup w^{\perp})|-2 < \mu$. Значит, вершина t находится на расстоянии больше двух от вершины z в графе Г. Противоречие с леммой 23. Таким образом, в подграфе $M(x,y)$ не существует вершин несмежных с u и w. Получили $\mu = \alpha+\beta, \nu = \mu+\hat{z}$. Введем некоторые обозначения для последующих рассуждений: подграф $M(x,y)$ — некликовый, то есть существует пара несмежных вершин c, d, причем $c \in [u]$, а $d \in [w]$.

Обозначим через h_j представителей ядер из $M(y,z)$, смежных с u, а через s_j — представителей ядер, не смежных с u, где $j = 1, \ldots, m$. Аналогично, обозначим через f_i, g_i представителей ядер в долях μ-подграфа $M(x,z)$, где $i = 1, \ldots, k$, причем вершины f_i смежны с w. Поскольку $M(u,w)$ — клика, то f_i смежны с h_j и, значит, $f_i \not\sim s_j$. Пусть для определенности $f_1, \ldots, f_l$ и $g_{l+1}, \ldots, g_k$ смежны с вершиной c. Для этих вершин выполняется следующее: либо если $M(c,w) \cap M(x,z) \neq \varnothing$, то $M(d,u) \cap M(y,z) = \varnothing$ (иначе получим 3-лапу из вершины w в f_1, d и некоторую s_j из окрестности вершины c); либо $M(c,w) \cap M(x,z) = \varnothing$. Получаем две возможности: $M(c,w) \cap M(x,z) \neq \varnothing$ или $M(c,w) \cap M(x,z) = \varnothing$, которые совпадают в силу симметрии. Пусть

$M(c,w) \cap M(x,z) \neq \varnothing$. Тогда все вершины h_j смежны с вершиной c. По лемме 27 имеем $m = 1$, $k = l+1$ и $|[d] \cap K(y,z)| = \hat{y} + \hat{z}$. Заметим, что $\hat{x} = \hat{c}$, а $\hat{y} = \hat{d}$. Поскольку вершина y несмежна с f_1, то $\mu = |M(c,w)| = \beta - \hat{f_k} + \hat{h_1} + |[c] \cap K(y,z)| + \hat{y} + \alpha - \hat{d} = \mu + |[c] \cap K(y,z)| - \hat{f_k} + \hat{h_1}$ и, следовательно, $\hat{f_k} = \hat{h_1} + |[c] \cap K(y,z)| = \alpha + |[c] \cap K(y,z)|$. Выпишем некоторые соотношения для α, β и μ:

$\mu = |[c] \cap K(y,z)| + 2(\hat{y} + \hat{z})$;

$\beta = \hat{f_1} + \ldots + \hat{f_k} = |[c] \cap K(x,z)| + \hat{f_1} + \ldots + \widehat{f_{k-1}} + \hat{g_k}$, то есть $\hat{f_k} = |[c] \cap K(x,z)| + \hat{g_k}$;

$\alpha = \hat{h_1} = |[c] \cap K(x,z)| + |[d] \cap K(x,z)| + \hat{g_1} + \ldots + \hat{g_k} = |[d] \cap K(x,z)| + \hat{g_1} + \ldots + \widehat{g_{k-1}} + \hat{f_k}$.

Но тогда $|[c] \cap K(x,z)| + |[d] \cap K(x,z)| + \hat{g_1} + \ldots + \hat{g_k} = \alpha = \hat{f_k} - |[c] \cap K(y,z)| = \hat{g_k} + |[c] \cap K(x,z)| - |[c] \cap K(y,z)|$ и получаем $|[d] \cap K(x,z)| + \hat{g_1} + \ldots + \widehat{g_{k-1}} = -|[c] \cap K(y,z)| \leq 0$. Следовательно, $|[c] \cap K(y,z)| = 0 = |[d] \cap K(x,z)| = \hat{g_1} = \ldots = \widehat{g_{k-1}}$ и, значит, $\mu = 2(\hat{y} + \hat{z})$, $\beta = \hat{f_k} = \hat{h_1} = \alpha$, $\mu = 2\alpha$. Отсюда $\hat{y} + \hat{z} = \alpha = \hat{h_1}$, но $\hat{h_1} + \hat{s_1} = \hat{y} + \hat{z}$ по лемме 27. Тогда $\hat{s_1} = 0$. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 29 *Пусть $\{x,y,z\}$ — особая тройка. Если произвольная вершина u из $K(x,z)$ смежна с любой вершиной w из $K(y,z)$, то ни один из μ-подграфов $[x] \cap [z]$, $[y] \cap [z]$ не является кликой.*

Доказательство.

Пусть $\{x,y,z\}$ — особая тройка, f, g — несмежные вершины из $M(x,y)$ и один из μ-подграфов $M(x,z)$, $M(y,z)$, например $M(x,z)$, является кликой, а подграф $K(y,z)$ не пуст. В этом случае по лемме 28 вершина w из $K(y,z)$ смежна с каждой вершиной из $M(x,z)$ и с одной из вершин $\{f,g\}$. Но тогда $|M(w,x)| > \nu$. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 30 *Ни один из μ-подграфов $M(a,b)$, $M(a,e)$, $M(b,e)$ не является кликой.*

Доказательство.

$M(a,b)$ — не клика по выбору, там содержатся несмежные вершины c и d. Предположим противное, пусть $M(a,e)$ — клика. Тогда по лемме 29, примененной к тройке $\{a,b,e\}$, $K(a,b)=\varnothing$ и $K(b,e)=\varnothing$, а каждый из $M(a,b)$ и $M(a,e)$ — ядерное расширение графа из класса $\mathcal{K}$. Выбираем вершину w в $M(a,b)\cup M(b,e)$ такую, что $[w]$ имеет наибольшее пересечение с $M(a,e)$. Без потери общности рассуждений можно считать, что w принадлежит $M(b,e)$.

Обозначим через d_j представителей ядер из $M(a,b)$, смежных с w, а через c_j — представителей ядер, не смежных с w, где $j=1,\ldots,\delta$. Пусть $c=c_1, d=d_1$. Аналогично, обозначим через u_i, w_i представителей ядер в долях μ-подграфа $M(b,e)$, где $i=1,\ldots,\varepsilon$, причем $w=w_1$, $u=u_1$ и пусть вершина c смежна с u_i, где $i=1,\ldots,\varepsilon$. По лемме 26 имеем $\hat{b}+\hat{e}=\hat{u}_i+\hat{w}_i$ для любого $i=\overline{1,\varepsilon}$ и, следовательно, $|M(b,e)|=\mu=\varepsilon(\hat{b}+\hat{e})$. Аналогично, $\hat{a}+\hat{b}=\hat{c_j}+\hat{d_j}$ для любого $j=\overline{1,\delta}$, откуда $|M(a,b)|=\mu=\delta(\hat{a}+\hat{b})$.

Далее заметим, что $M(u,d_j)\cap M(a,e)=\varnothing$ для всех $j=\overline{1,\delta}$. Действительно, если взять $x\in M(u,d_j)\cap M(a,e)$, то для $y\in M(w,c_j)\cap M(a,e)$ получаем 3-лапу $\{x;y,d_j,u\}$. Значит $M(w,c_j)\cap M(a,e)=\varnothing$. Но тогда получаем $M(a,e)\cap[w]\subseteq M(a,e)\cap[d_j]$, причем правая часть больше хотя бы на одну вершину x. Это противоречит максимальности w.

По лемме 27 имеем $M(w,c_j)\cap M(a,e)=\varnothing$ для всех $j=\overline{1,\delta}$.

Пусть $\varepsilon=1$. Тогда $M(d,u)=K(b)\cup(\bigcup\limits_{j=2}^{\delta}K(c_j))$ — клика, то есть $\nu=\hat{b}+\sum\limits_{j=2}^{\delta}\hat{c_j}$. Из подграфа $M(a,b)$ получаем $\mu=\sum\limits_{j=1}^{\delta}(\hat{c_j}+\hat{d_j})$. По лемме 26 выполняется $\hat{a}+\hat{b}=\hat{c}+\hat{d}$. Но тогда $\mu=\hat{a}+\hat{b}+\sum\limits_{j=2}^{\delta}(\hat{c_j}+\hat{d_j})=\nu+\hat{a}+\sum\limits_{j=2}^{\delta}\hat{d_j}$. Противоречие с условием $\nu\geq\mu$. Аналогично предположим, что $\delta=1$. Тогда $\nu=|M(d,u)|=\hat{b}+\sum\limits_{i=2}^{\varepsilon}\hat{w}_i$, из $M(b,e)$ получаем $\mu=\sum\limits_{i=1}^{\varepsilon}(\hat{u}_i+\hat{w}_i)$, а по лемме 26 имеем $\hat{b}+\hat{e}=\hat{u}+\hat{w}$. Тогда $\mu=\hat{b}+\hat{e}+\sum\limits_{i=2}^{\varepsilon}(\hat{u}_i+\hat{w}_i)=\nu+\hat{e}+\sum\limits_{i=2}^{\varepsilon}\hat{u}_i$. Противоречие.

Значит $\varepsilon > 1$ и $\delta > 1$.

Пусть $z_j \in M(a,e) \cap M(w,c_j)$. Тогда $\{u, d_j, z_j\}$ — исключительная тройка. В самом деле, u, z_j — сильная пара, $d_j \notin u^\perp \cup z_j^\perp$ и $M(u,d_j) = (\bigcup\limits_{i \neq j} c_j^\perp) \cup K(b) \cup (\bigcup\limits_{i=2}^{\varepsilon} w_i^\perp)$, $M(u,z_j) = K(c_j) \cup K(e) \cup (\bigcup\limits_{i=2}^{\varepsilon} u_i^\perp) \cup ([u] \cap M(a,e))$, $M(d_j,z_j) = K(a) \cup K(w) \cup (\bigcup\limits_{i \neq j} d_i^\perp) \cup (M(w,d_j) \cap M(a,e))$, то есть $\Gamma = \Sigma(u, d_j, z_j)$.

$\Gamma = b^\perp \cup z_j^\perp$. По лемме 27 имеем $\hat{z}_j = |K(z_j)| = |(M(w,c_j) \cap M(a,e)| = |[w] \cap [c_j] \cap [a] \cap [e]| = \hat{a} + \hat{e}$. Поэтому $|\Gamma| = \hat{a} + \hat{e} + \hat{b} + \nu + 2\mu = \hat{b} + \hat{z}_j + \nu + 2\mu$ для всех j. Рассматривая 3-коклику $\{u, d_j, z_j\}$ по лемме 27 получаем $\hat{b} = \hat{u} + \hat{d}_j$. Теперь рассмотрим 3-коклику $\{a, u, w\}$. Так как $M(a,u) = (\bigcup\limits_{j=1}^{\delta} K(c_j)) \cup ([u] \cap M(a,e))$ — клика, $M(a,w) = (\bigcup\limits_{j=1}^{\delta} K(d_j)) \cup ([w] \cap M(a,e))$ — не клика, $M(u,w) = K(b) \cup K(e) \cup (\bigcup\limits_{i=2}^{\varepsilon} K(u_i)) \cup (\bigcup\limits_{i=2}^{\varepsilon} K(w_i))$ — не клика, причем $M(d_j, e) \cap M(a,u) = \varnothing$, а $|M(z_j, b) \cap M(a,u)| = \hat{c}_j$.

Пусть $z = z_1$. Заметим, что вершина z смежна в точности с $K(c) \cup (\bigcup\limits_{j=2}^{\delta} K(d_j))$ в $M(a,b)$. Действительно, если $z \sim c_2$, то $z^\perp \cup d^\perp = c_2^\perp \cup w^\perp = z^\perp \cup b^\perp = \Gamma$. Но $u \notin z^\perp \cup d^\perp$. Противоречие. Значит $z \not\sim c_2$.

Каждая из вершин z_j смежна в точности с $K(w) \cup (\bigcup\limits_{i=2}^{\varepsilon} K(u_i))$ в $M(b,e)$. В самом деле, предположим, что $z \sim w_2$. Тогда $\Gamma = z^\perp \cup b^\perp = c^\perp \cup w_2^\perp = z^\perp \cup u^\perp$. Но $d \notin z^\perp \cup u^\perp$. Значит z не смежна с вершиной w_2. Кроме того, $([c_j] \cap M(b,e)) \setminus (K(u) \cup K(w)) = ([z_j] \cap M(b,e)) \setminus (K(u) \cup K(w))$ при $j = \overline{2, \delta}$, так как если $c_2 \sim u_2$ и $z_2 \sim w_2$, то получаем 3-лапу $\{z_2; z, c_2, w_2\}$. Число вершин в $[u] \cap M(a,e)$ превосходит $|\bigcup\limits_{j=1}^{\delta} K(d_j)|$, то есть существует вершина x из $[u] \cap M(a,e)$. Действительно, рассматривая 3-коклику $\{a, u, w\}$, получим $|(\bigcup\limits_{j=1}^{\delta} K(c_j)) \cup ([u] \cap M(a,e))| = |M(a,u)| = \nu \geq \mu = |M(a,b)| = |(\bigcup\limits_{j=1}^{\delta} K(c_j)) \cup (\bigcup\limits_{j=1}^{\delta} K(d_j))|$. Следовательно, $|[u] \cap M(a,e)| \geq |\bigcup\limits_{j=1}^{\delta} K(d_j)| \neq \varnothing$. Теперь возьмем $x \in [u] \cap M(a,e)$. Вершина x смежна со всеми c_j. Обозначим через y некоторую вершину из $M(b,e) \setminus ([z] \cup K(u))$. Если вершина x смежна с вершиной y, то $c_j \sim y (j = \overline{2,\delta})$, так как иначе образуется 3-лапа $\{x; z, c_j, y\}$. Иными словами, окрестности всех c_j(а значит и z_j тоже) содержатся в окрестности вершины x на $M(b,e) \setminus ([z] \cup K(u))$. Более точно:

$([z_i] \cap M(b,e)) \setminus [z_j] \subseteq ([x] \cap M(b,e)) \setminus [z_j]$ для $i \neq j$.

Если вершина y смежна с некоторой z_i, но не смежна с z_j, то она попадает в окрестность вершины x. Предположим, что существует такая вершина $y \in ((\bigcap\limits_{i=1}^{\delta} [z_i]) \cap M(b,e)) \setminus [x]$. Тогда y смежна со всеми z_i и со всеми c_i. Получаем 3-лапу $\{c; x, d_2, y\}$. Противоречие.

Тройка вершин $\{a, u, w\}$ является исключительной и $K(a,w)$ пусто по лемме 29. Значит, $[w] \cap M(a,e) = \bigcup\limits_{j=1}^{\delta} K(z_j)$.

Таким образом, $[w] \cap M(a,e)$ содержит $\delta(\hat{a} + \hat{e})$ вершин. Поскольку подграф $M(a,w)$ — не клика, то $\mu = |M(a,w)| = \sum\limits_{j=1}^{\delta} \hat{d}_j + |[w] \cap M(a,e)|$ и $\mu = |M(a,b)| = \sum\limits_{j=1}^{\delta} (\hat{d}_j + \hat{c}_j)$. Отсюда $|[w] \cap M(a,e)| = \sum\limits_{j=1}^{\delta} \hat{c}_j$ и $\hat{e} = \hat{u}$, а $\hat{b} = \hat{w}$. Заметим, что окрестность вершины u_i совпадает с окрестностью вершины w в μ-подграфе $M(a,e)$ для $i \geq 2$. Поскольку dw_2 и cu_2 — ребра, то по лемме 27 имеем $|M(d,u_2) \cap M(a,e)| + |M(c,w_2) \cap M(a,e)| = \hat{a} + \hat{e}$, то есть $\hat{z}_2 + \ldots + \hat{z}_\delta + |M(c,u) \cap M(a,e)| = \hat{a} + \hat{e}$. Но тогда получаем равенство $(\delta - 1) \cdot (\hat{a} + \hat{e}) + |M(c,u) \cap M(a,e)| = \hat{a} + \hat{e}$, из которого при $\delta \geq 2$ следует, что $\delta = 2$ и $|M(c,u) \cap M(a,e)| = 0$. Значит, $|[w] \cap M(a,e)| = \nu$. Противоречие. Лемма доказана.

Среди исключительных троек зафиксируем тройку $\{a, b, e\}$ с минимальной валентностью вершины a.

Лемма 31 *Пусть подграф $K(b,e)$ содержит вершину z. Если $x \in \Gamma - z^\perp$, то $\Gamma = x^\perp \cup z^\perp$, вершина x лежит в исключительной тройке $\{x, y, z\}$ и либо $k_x = k_a$, либо $k_x > k_a$, причем $|M(a,z)| = \mu$, $|M(x,z)| = \nu$ и $\hat{y} \geq \hat{e} + \mu - \nu$.*

Доказательство.

Так как вершина z принадлежит $K(b,e)$, то $x \in K(a) \cup M(a,b) \cup M(a,e)$. Если $x \in K(a)$, то $x^\perp = a^\perp$ и, следовательно $k_x = k_a$. Не теряя общности рассуждений, мы можем считать, что $x \in M(a,e)$. Поскольку $\{a,b,e\}$ — особая тройка и $K(b,e) \neq \varnothing$, то $M(a,e)$ не является кликой. Тогда по лемме 29 вершина x не смежна с некоторой вершиной $y \in M(a,e)$. Тройка $\{x,y,b\}$ является исключительной, так как подграф $M(x,y)$ содержит несмежные вершины a и e, вершина b не лежит в $x^\perp \cup y^\perp$ и $\Gamma = \Sigma(x,y,b)$.

Поскольку $\Gamma = a^\perp \cup z^\perp$, то $|\Gamma| = k_a + k_z + 2 - |M(a,z)|$. Ввиду включения $x^\perp \cup z^\perp \subseteq \Gamma$ имеем $k_x + k_z + 2 - |M(x,z)| \leq k_a + k_z + 2 - |M(a,z)|$. Далее рассмотрим все возможные варианты для подграфов $M(a,z)$ и $M(x,z)$:

Случай 1. Если $M(a,z)$ и $M(x,z)$ — кликовые подграфы, то получаем $k_x + k_z + 2 - \nu \leq k_a + k_z + 2 - \nu$. Но по выбору вершины a должно быть $k_x \geq k_a$. Значит, $k_x = k_a$.

Случай 2. Если $M(a,z)$ и $M(x,z)$ — не являются кликами, то, аналогично случаю 1 получаем $k_x = k_a$.

Случай 3. Если $M(a,z)$ — кликовый подграф, а $M(x,z)$ — не является кликой, то $k_x - \mu \leq k_a - \nu$ или $k_x + \nu \leq k_a + \mu$. Получили противоречие, так как $k_x \geq k_a$ и $\nu \geq \mu$.

Случай 4. Если $M(x,z)$ — кликовый подграф, а $M(a,z)$ — не является кликой, то $k_x - \nu \leq k_a - \mu$, причем $k_x = 2\mu - 1 - \hat{y} + \hat{a} + \hat{e}$, $k_a = 2\mu - 1 + \hat{a}$. Значит $\hat{y} \geq \hat{e} + \mu - \nu$. Лемма доказана.

Лемма 32 *Граф $M(b,e)$ является ядерным расширением графа из класса $\mathcal{K}$.*

Доказательство.

По лемме 30 подграф $M(b,e)$ не является кликой. По лемме 26 подграф $M(b,e) - K(b,e)$является ядерным расширением графа из класса $\mathcal{K}$. Для доказательства леммы достаточно доказать, что $K(b,e) = \varnothing$. По лемме 29 подграф $M(a,e)$ некликовый. Теперь предположим, что $K(b,e)$ содержит вершину z и пусть для определенности эта вершина смежна с d. Если $[z]$ содержит α вершин из $M(a,e)$, то $|[z] \cap M(a,b)| = |M(a,z)| - \alpha$. Поскольку $M(a,e)$ и $M(a,b)$ не являются кликами, то без ограничения общности, $\alpha \leq |M(a,z)| - \alpha$ и $\frac{\mu}{2} \leq |M(a,z)| - \alpha$. Далее по леммам 26 и 29 для любой вершины $f_1 = f \in M(a,e) - [z]$ найдется вершина $g_1 = g \in [z] \cap M(a,e)$ такая, что $M(a,e) - f^{\perp} = K(g)$. Если g является β-точкой для $M(b,e)$, то f тоже β-точка для $M(a,b)$. Поэтому, рассмотрев вместо 3-коклики $\{e,a,b\}$ тройку $\{f,g,b\}$ получим с одной стороны $\hat{a} = \hat{f}$ и $\hat{e} = \hat{g}$, а с другой стороны $\hat{a} = \hat{g}$ и $\hat{e} = \hat{f}$. Тогда $\hat{a} = \hat{f} = \hat{e} = \hat{g}$ и из μ-графа $M(a,e)$ получаем $\alpha = |K(a,b)| + m\hat{a}, \mu - \alpha = m\hat{a}$ и $\mu - \alpha \leq \alpha$.

Далее, если $M(a,z)$ — некликовый, то $\mu - \alpha \leq \alpha \leq \mu - \alpha$. Отсюда $\mu = 2\alpha$ и $K(a,e) =$. Симметрично, в подграфе $M(a,b)$ ядро пусто и значит он также является расширением графа из класса $\mathcal{K}$. Пусть теперь u, w — несмежные вершины из $M(b,e)$. Поэтому $\hat{u} + \hat{w} = \hat{b} + \hat{e}$ и $M(b,e) - K(b,e)$ является расширением графа из класса $\mathcal{K}$. Заметим, что $[c]$ не пересекает $K(b,e)$ и $|[d] \cap M(b,e)| > \frac{\mu}{2}$ по крайней мере на одну вершину z. С другой стороны, $|[d] \cap M(b,e)| = \frac{\mu}{2}$ по структуре графа $M(c,e)$. Противоречие.

Если же $M(a,z)$ клика, то получаем $\mu \leq 2\alpha \leq \nu$, то есть $\frac{\mu}{2} \leq \alpha$. Окрестность вершины d в подграфе $M(a,e)$ совпадает с окрестностью вершины z и потому $|[d] \cap M(b,e)| = \mu - \alpha > \frac{\mu}{2}$. Таким образом $\frac{\mu}{2} > \alpha$. Но $\frac{\mu}{2} \leq \alpha$. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 33 *Пусть $\{a,b,e\}$ — исключительная тройка и $M(b,e)$ лежит в классе $\mathcal{K}$. Пусть также подграф $M(a,e) \backslash K(a,e)$ состоит из δ долей $K(f_i) \cup K(g_i)$, где $f_i c, g_i d$ — ребра; подграф $[c] \cap M(b,e) = \bigcup_{j=1}^{\epsilon} K(u_j)$, $[d] \cap M(b,e) = \bigcup_{j=1}^{\epsilon} K(w_j)$, где $K(u_j) \cup K(w_j)$ — доли подграфа $M(b,e)$, $j = 1, \ldots, \epsilon$. Тогда доли $K(u_j) \cup K(w_j)$ можно упорядочить так, что $K(u_j) = M(c,g_j) \cap M(b,e)$, $K(w_j) = M(d,f_j) \cap M(b,e)$ для $j = 1, \ldots, \delta$. Более того, пары вершин $f_i u_j, g_i w_j$ являются ребрами тогда и только тогда, когда $i \neq j$, пары вер-*

шин f_iw_j, g_iu_j *являются ребрами тогда и только тогда, когда* $i = j, i = 1, \ldots, \delta, j = 1, \ldots, \epsilon$.

Доказательство.

Если f, g — несмежные вершины из $M(a, e)$ и cf, dg — ребра, то по леммам 27 и 32 графы $M(c, g)$ и $M(d, f)$ пересекают $M(b, e)$, так как $K(b, e) = \varnothing$. По лемме 15 в подграфе $M(c, g) \cap M(b, e)$ нет вершин смежных с вершинами из $M(d, f) \cap M(b, e)$. Поэтому указанные графы совпадают с $K(u), K(w)$ для некоторых несмежных вершин u, w из $M(b, e)$. Отсюда число ϵ долей в редукции графа $M(b, e)$ не меньше числа долей δ в редукции графа $M(a, e) \setminus K(a, e)$, так как для каждой пары f_i, g_i есть хотя бы одна пара u_j, w_j. Теперь $[g_i] \cap (K(u_1) \cup \ldots \cup K(u_\epsilon)) = K(u_i)$, следовательно, вершина g_i не смежна с $u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_\epsilon$. Поэтому g_i смежна с $w_1, \ldots, w_{i-1}, w_{i+1}, \ldots, w_\epsilon$. Аналогично доказывается утверждение о смежности вершин f_i с u_j. Лемма доказана.

В оставшихся леммах этого раздела зафиксируем обозначения, введенные в лемме 33.

Лемма 34 *Если* $z \in K(a, b)$, *то подграф* $M(z, e) \setminus K(a, e)$ *не является кликой.*

Доказательство.

Предположим противное. Пусть $M(z, e) \setminus K(a, e)$ — клика. Следовательно, $M(z, e)$ — клика. Без ограничения общности $z \in [f_1] \setminus [g_1]$. Клика $M(z, e)$ содержит вершину f_1. Значит, вершины из $[z] \cap M(b, e)$ смежны с f_1, то есть $M(b, e) \cap [z] \subseteq [f_1] = K(w_1) \cup (\bigcup_{j=2}^{\epsilon} K(u_j))$. Теперь $M(z, e)$ содержит вершину w_1, то есть $(M(a, e) \setminus K(a, e)) \cap [z] \subseteq (M(a, e) \setminus K(a, e)) \cap [w_1] = K(f_1) \cup (\bigcup_{i=2}^{\delta} K(g_i))$. Таким образом, подграф $M(z, e)$ равен подграфу $K(w_1) \cup (\bigcup_{j=2}^{\epsilon} K(u_j)) \cup K(f_1) \cup (\bigcup_{i=2}^{\delta} K(g_i)) \cup K(a, e)$, причем из леммы 33 следует $\varepsilon \geq \delta$. Заметим, что если $[c] \cap K(a, e)$ не пусто, то существует вершина $y \in [c] \cap K(a, e)$ и $\{g_1; y, d, u_1\}$ — 3-лапа. Таким образом, все вершины из $K(a,e)$ смежны с d. Симметрично, если $[g_1]\cap K(a,b)$ не пусто, то существует вершина $z'\in[g_1]\cap K(a,b)$ и $\{c;z',f_1,u_1\}$ — 3-лапа. Таким образом, все вершины из $K(a,b)$ смежны с f_1. Поскольку $g_2\not\sim u_3$ по лемме 33, то при $\epsilon>\delta\geq 2$ получаем противоречие с тем, что $M(z,e)$ — клика. Поэтому возможны случаи:

Случай 1. Если $\epsilon=\delta=1$, то $M(z,e)=K(f_1)\cup K(w_1)\cup K(a,e)$. Но тогда любая вершина s из $K(a,e)$ попадает в ядро подграфа $M(d,e)$. По лемме 32 $K(d,e)$ — пустой граф. Значит, $K(a,e)=\varnothing$. Теперь $|M(a,e)|=\mu=\hat{f}_1+\hat{g}_1=\hat{a}+\hat{e}$ и $|M(b,e)|=\mu=\hat{w}_1+\hat{u}_1=\hat{b}+\hat{e}$. Отсюда $\hat{b}=\hat{a}=\hat{c}=\hat{d}$, $\mu=2\hat{a}$ и значит $K(a,b)$ пусто. Противоречие.

Случай 2. Пусть $\epsilon=\delta=2$. Так как $\Gamma\setminus z^{\perp}$ является кликой, то $\Gamma=z^{\perp}\cup x^{\perp}$ для любой вершины x из $\Gamma\setminus z^{\perp}$. Отсюда $\hat{x}=\hat{e}$ для любой вершины x из $\Gamma\setminus z^{\perp}$ и $\hat{y}=\hat{a}$ для любой вершины y из $M(z,e)$. Далее, $\mu=|M(b,e)|=2(\hat{b}+\hat{e})=2\hat{a}+2\hat{e}$ и потому $\hat{a}=\hat{b}$. Рассматривая вместо $\{b,e,a\}$ 3-коклику $\{w_1,u_1,a\}$ получим $\hat{w}_1=\hat{e}$, то есть $\hat{a}=\hat{e}$. Но тогда $|[g_1]\cap M(a,b)|=\mu-\hat{u}_1-\hat{w}_2=\mu-2\hat{e}=2\hat{a}$ и потому $K(a,b)$ пусто. Противоречие.

Случай 3. Если $\epsilon>\delta=1$, то по лемме 27 для любого $i\geq 2$ подграф $M(u_i,d)$ содержит вершину s_i из $K(a,e)$, причем $\hat{s}_i=\hat{a}+\hat{e}$. Тогда $\mu=|M(a,e)|=\hat{f}_1+\hat{g}_1+(\epsilon-1)\hat{s}_1=\epsilon(\hat{a}+\hat{e})$. Из подграфа $M(b,e)$ получаем $\mu=\epsilon(\hat{b}+\hat{e})$. Значит $\hat{a}=\hat{b}$ и $\mu=|M(c,e)|=\hat{f}_1+\epsilon\hat{u}_1=\hat{a}+\epsilon\hat{e}$. Поэтому $\epsilon=1$. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 35 *Граф* Γ *не содержит исключительных троек.*

Доказательство.

Пусть $\{a,b,e\}$ — исключительная тройка с наименьшим k_a. По лемме 32 граф $\Gamma-a^{\perp}=K(b)\cup K(e)\cup M(b,e)$ является ядерным расширением графа из класса $\mathcal{K}$ с числом долей на 1 больше, чем в $M(b,e)$. Ввиду леммы 30, ни один из подграфов $M(a,b),M(a,e),M(b,e)$ не является кликой. Значит $|M(a,b)|+|M(a,e)|=2\mu$. С другой стороны $|M(a,u)|+|M(a,w)|=$

$|M(a,b)|+|M(a,e)|=2\mu$. Так как $M(a,u)$ и $M(a,w)$ не пусты, то они некликовые. Значит, для любой вершины $x\in\Gamma-a^\perp$ подграф $M(a,x)$ не является кликой. Без ограничения общности можно считать, что вершина e имеет наибольшую валентность среди вершин из $\Gamma-a^\perp$. Покажем, что $M(a,e)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$. Пусть $z\in K(a,e)$. Тогда $\Gamma=z^\perp\cup b^\perp$. Без ограничения общности можно считать, что вершина $z\sim c$. Если $z\sim w_1$, то получаем 3-лапу $\{z;c,g_1,w_1\}$. Значит, $z\sim u_1$. Рассмотрим ребра cu_1 и dw_1. По лемме 27 либо $M(d,u_1)$ и $M(c,w_1)$ пересекают подграф $M(a,e)$ по долям, либо один из них не пересекает подграф, а другой пересекает его по ядру. Но $M(d,u_1)\cap M(a,e)$ пусто, а $M(c,w_1)\cap M(a,e)=K(a,e)\cup K(f_1)$. Противоречие. Значит $K(a,e)$ пусто.

Теперь по лемме 27 число долей δ в редукции графа $M(a,e)$ совпадает с числом долей в редукции графа $M(b,e)$, то есть $\mu=\delta(\hat a+\hat e)=\delta(\hat b+\hat e)$ и, следовательно, $\hat a=\hat b$, $k_a=k_b=k_c=k_d$.

Если ϵ — число долей в подграфе $M(a,b)$, то $\epsilon\le\delta$. Если $K(a,b)$ пусто, то $\epsilon=\delta$, $k_a=k_e$ и тогда в редукции $\bar\Gamma$ графа Γ все μ-подграфы изоморфны $K_{\delta\times 2}$. Значит, граф $\bar\Gamma$ регулярен и $\bar\Gamma$ изоморфен 3×3 решетке, треугольному графу $T(6)$ или графу Шлефли, что противоречит выбору Γ. Значит, $K(a,b)$ не пусто, то есть существует вершина $z\in K(a,b)$. По лемме 34 $(M(z,e)-K(z,e))$ — не клика, то есть $[z]$ содержит несмежные вершины f_1 и w_2, причем $\delta\ge 2$. Так как g_1 и u_2 — антиподы для f_1 и w_2 соответственно в подграфах $M(a,e)$ и $M(b,e)$, то тройка $\{g_1,u_2,z\}$ является исключительной, $\Gamma=\Sigma(g_1,u_2,z)$ и $\hat a+\hat b+\hat e=\hat g_1+\hat u_2+\hat z$. Ввиду того, что $M(f_1,w_2)\cap M(a,b)$ содержит вершину z, то по лемме 27 $M(g_1,u_2)\cap M(a,b)$ пусто и $\hat z=|M(f_1,w_2)\cap M(a,b)|+|M(g_1,u_2)\cap M(a,b)|=\hat a+\hat b=2\hat a$. Теперь из образовавшихся четырехугольников можно выписать соотношения: $\hat f_1+\hat b=\hat u_2+\hat z$, $\hat f_1+\hat w_2=\hat e+\hat z$. Упрощая равенства, получим $\hat f_1=\hat u_2+\hat a$, $\hat f_1+\hat w_2=\hat e+2\hat a$, $\hat e=\hat g_1+\hat u_2$. Кроме того, из четырехугольников cf_ieu_i и dg_iew_i имеем $\hat f_i+\hat u_i=\hat c+\hat e$,

$\hat{g}_i + \hat{w}_i = \hat{d} + \hat{e} = \hat{c} + \hat{e}$. Значит, $\hat{g}_i = \hat{u}_i$, $\hat{f}_i = \hat{w}_i$.

Если вершина смежна z с g_2, то g_2 и w_2 — несмежные вершины из $M(z, e)$ и, следовательно, $\hat{g}_2 + \hat{w}_2 = \hat{z} + \hat{e} = 2\hat{a} + \hat{e}$. Но $\hat{g}_2 + \hat{w}_2 = \hat{u}_2 + \hat{w}_2 = \hat{e} + \hat{a}$. Противоречие. Значит, $z \sim f_2$ и, симметрично, $z \sim w_1$.

Если z не смежна с $u_3, \ldots, u_\delta$, то получаем 3-лапу $\{f_2; z, g_1, u_m\}$, где $3 \leq m \leq \delta$. Значит, $z \sim u_3, \ldots, u_\delta$. Аналогично, если $z \not\sim g_3, \ldots, g_\delta$, то получаем 3-лапу $\{w_2; z, u_1, g_m\}$, где $3 \leq m \leq \delta$. Значит, $z \sim g_3, \ldots, g_\delta$. Теперь при $\delta \geq 5$ получаем 3-лапу $\{g_5; z, w_4, f_3\}$. Следовательно, $\delta \leq 4$ причем $\delta \geq 2$.

Пусть $\delta = 4$ и $\mu = 4(\hat{a} + \hat{e})$. Так как $g_2 \not\sim u_1$, то $\mu = |M(g_1, u_2)| = \hat{f}_3 + \hat{w}_3 + \hat{f}_4 + \hat{w}_4 + \hat{e} + \hat{g}_2 + \hat{u}_1 = 4\hat{e}$. Противоречие.

Пусть $\delta = 3$ и $\mu = 3(\hat{a}+\hat{e})$. Так как $\mu = |M(g_1, u_2)| = \hat{f}_3 + \hat{w}_3 + \hat{e} + \hat{g}_2 + \hat{u}_1 = 2\hat{e} + 2\hat{f}_3$, то $2\hat{f}_3 = \hat{e} + 3\hat{a}$. Из равенства $\mu = |M(z, e)| = \hat{f}_1 + \hat{f}_2 + \hat{w}_1 + \hat{w}_2 + \hat{g}_3 + \hat{u}_3 = 2\hat{e} + 4\hat{a} + 2\hat{g}_3$ находим, что $2\hat{g}_3 = \hat{e} - \hat{a}$. Пересечение подграфа $M(f_2, u_2)$ с $M(a, b)$ дает только долю $K(c)$. Если число долей ϵ подграфа $M(a, b)$ не меньше двух, то получаем 3-лапу $\{c; f_2, u_2, x\}$, где $x \in M(a, b) - (K(a, b) \cup K(c) \cup K(d))$. Следовательно, $\epsilon = 1$. Но тогда $\mu = |M(a, b)| = \hat{z} + \hat{c} + \hat{d} = 4\hat{a}$ и $\hat{a} = 3\hat{e}$. Получаем $2\hat{g}_3 = \hat{e} - \hat{a} = -2\hat{a}$. Противоречие.

Пусть $\delta = 2$ и $\mu = 2(\hat{a} + \hat{e})$. Но $\mu = |M(z, e)| = \hat{f}_1 + \hat{f}_2 + \hat{w}_1 + \hat{w}_2 = 2\hat{e} + 4\hat{a}$. Противоречие. Лемма доказана.

1.5 Особые тройки в графах без 3-лап с ограничениями на их μ-подграфы.

В этом разделе завершается доказательство теоремы 1. Пусть $\{a, b, e\}$ — особая тройка из Γ, а вершины c и d из $[a] \cap [b]$. В предыдущем разделе мы доказали, что тройка $\{a, b, e\}$ не является исключительной тройкой.

Лемма 36 *Если $\{a, b, e\}$ — особая тройка, то $\Sigma(a, b, e)$ является α-расширением 3×3-решетки, треугольного графа $T(6)$ или графа Шлефли.*

Доказательство.

Покажем, что $\Sigma(a,b,e)$ содержит μ-подграфы своих вершин, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Пусть $x,y \in \Sigma(a,b,e), d(x,y)=2$ и $M(x,y)$ не лежит в $\Sigma(a,b,e)$. Без ограничения общности $x \in M(a,b), y \in M(b,e)$ и $M(x,y)$ содержит вершину s из $[b]-(K(b)\cup[a]\cup[e])$. Если вершина y не из ядра $M(b,e)$, то есть y не смежна с некоторой вершиной z из этого подграфа, то xz — ребро. Тогда по лемме 13 окрестности вершин x и z совпадают на $b^\perp-([a]\cup[e])$, то есть sz — ребро. Но тогда вершина $s \in K(b)$. Значит, $x \in K(a,b), y \in K(b,e)$. Согласно лемме 28 вершина x смежна с вершиной y. Противоречие с выбором вершин x,y.

По лемме 35 подграф $\Sigma(a,b,e)$ является собственным подграфом из Γ и удовлетворяет условию теоремы 1. Так как Γ — минимальный контрпример и не содержит 4-коклик, то по индуктивному предположению $\Sigma(a,b,e)$ является α-расширением 3×3-решетки, треугольного графа $T(6)$ или графа Шлефли. Лемма доказана.

Лемма 37 *Граф* Γ *не содержит особых троек.*

Доказательство.

Пусть $\{a,b,e\}$ является особой тройкой. По лемме 36 все μ-подграфы для вершин из $\Sigma(a,b,e)$ изоморфны α-расширению графа из класса $\mathcal{K}$ с одним и тем же числом долей m, где $m \in \{1,2,4\}$. Далее, если $x \in \Gamma-(a^\perp\cup b^\perp)$, то $\{a,b,x\}$ — особая тройка. Более того, поскольку $\Sigma(a,b,e)$ и $\Sigma(a,b,x)$ содержат μ-подграф $M(a,b)$, то подграф $\Sigma(a,b,x)$ изоморфен $\Sigma(a,b,e)$. Аналогично, подграф $\Sigma(a,y,e)$ изоморфен $\Sigma(a,b,e)$ для любой вершины $y \in \Gamma-(a^\perp\cup e^\perp)$. Следовательно, μ-подграфы $M(a,x)$ изоморфны μ-подграфу $M(a,b)$ для любой вершины $x \in \Gamma - a^\perp$. Ввиду строения графов из заключения леммы 36 любая вешина из $\Sigma(a,b,e)$ лежит в 3 -коклике из $\Sigma(a,b,e)$, то есть лежит в особой тройке. Значит, вышеприведенное рассуждение справедливо для любой вершины из $\Sigma(a,b,e)$. Но тогда все μ-подграфы из Γ изоморфны. Итак, все μ-подграфы из Γ регулярны и по лемме 12 граф Γ регулярен. Тогда Γ является α-расширением $3 \times m$-решетки, $m \geq 4$ или треугольного графа $T(7)$. Противоречие с выбором Γ. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 1. По условию теоремы 1 граф Γ содержит 3-коклику. Пусть $\{x, y, z\}$ — произвольная 3-коклика из Γ. По лемме 37 кликами являются μ-подграфы $M(x, y), M(x, z)$ и $M(y, z)$. Более того, кликой является любой μ-граф из антиокрестности вершины w, где $w \in \{x, y, z\}$. Таким образом, в виду леммы 37, антиокрестность вершины w является связным графом Тервиллигера без 3-коклик. По лемме 4 антиокрестность вершины w является кликовым расширением 2-пути, 3-пути пятиугольника или пятиугольной пирамиды. В случае, когда антиокрестность одной из вершин из множества $\{x, y, z\}$ является кликовым расширением пятиугольной пирамиды, то нетрудно видеть, две другие антиокрестности так же будут кликовыми расширениями пятиугольной пирамиды. В этом случае граф Γ изоморфен кликовому расширению графа икосаэдра. Это противоречит лемме 23, поскольку граф икосаэдра имеет диаметр 3. Во всех остальных случаях мы можем найти подграф, антиокресности вершин, которого являются кликовыми расширениями 2-путей. Ввиду предположения индукции, можно считать, что таковым является граф Γ. Теперь граф Γ состоит из 6 клик: $X, Y, Z, M(x, y), M(x, z)$ и $M(y, z)$, где X, Y и Z — ядра окрестностей вершин x, y и z, соотвественно. Рассмотрим две несмежные вершины $u \in M(x, z)$ и $w \in M(x, y)$. Тогда $|M(u, w)| = \hat{x} + \alpha + \beta + \gamma$, где α — число вершин в $M(x, y) \cap [u]$, β — число вершин в $M(x, z) \cap [w]$, γ — число вершин в $M(z, y) \cap [u] \cap [w]$.

Если $M(u, w)$ — клика, то $\gamma = 0$ и $\hat{x} + \alpha + \beta = \nu$. Тогда $\delta = |M(z, y) \setminus M(z, y) \cap [u] \cap [w]| = \alpha + \beta - \mu$. Если $\delta \neq 0$, то $\nu = \delta + (\mu - \alpha) + (\mu - \beta)$. Учитывая, что $\delta = \alpha + \beta - \mu$, получим $\mu = \nu$, противоречие. Если $\delta = 0$, то $\nu + \alpha + \beta = 2\mu$. С другой стороны $\nu = \hat{x} + \alpha + \beta$. Отсюда следует, что $\hat{x} = 0$, противоречие.

Таким образом, в этом случае в графе $\Omega = M(x,y) \cap M(x,z) \cap M(y,z)$ нет кликовых μ-подграфов.

Теперь $M(u,w)$ не является кликой, т.е. $\hat{x}+\alpha+\beta+\gamma = \mu$. Тогда в подграфе $M(z,y)$ число вершин смежных с u равно $|M(u,y)| - \alpha - \gamma$, а число вершин смежных с w равно $|M(w,z)| - \beta - \gamma$ и $(|M(u,y)| - \alpha - \gamma) + (|M(w,z)| - \beta - \gamma) + \gamma = \nu - \delta$. Заметим, что $|M(u,y)| + |M(w,z)| \leq \nu + \alpha + \beta + \gamma$. Поэтому рассматриваемые μ-подграфы не являются кликами, т.е. $|M(u,y)| = \mu$ и $|M(w,z)| = \mu$. Тогда $2\mu - \alpha - \beta - \gamma = \nu - \delta$. Учитывая, что $\alpha + \beta + \gamma = \mu - \hat{x}$, получим $\mu + \delta + \hat{x} = \nu$. Если $\delta \neq 0$, то в рассматриваемом графе есть 3-коклика, состоящая из вершин u, w и некоторой вершины из $M(z,y) \setminus M(z,y) \cap [u] \cap [w]$. Известно, что в этом случае все μ-подграфы являются кликами, противоречие. Значит $\delta = 0$ и $\mu + \hat{x} = \nu$. Рассуждая аналогично, можно показать, что $\hat{x} = \hat{y} = \hat{z} = \nu - \mu$.

Рассмотрим граф Ω. Число вершин в этом графе равно 3ν, степень каждой вершины равно $\nu+\mu-1$. Любая пара несмежных вершин имеет $2\mu-\nu$ общих смежных вершин. Антиокрестность любой вершины содержит $2\nu-\mu$ вершин и является кликой. Тогда любая вершина из $M(z,y)$ смежна не менее чем с $\nu-\alpha$ вершинами из $M(x,y)$. Рассмотрим вершину s из $M(x,y)$ несмежную с вершиной u. Тогда μ-граф вершин u и s содержит $\nu-\alpha$ вершин из $M(z,y) \cup M(x,y)$ и α вершин из $[u] \setminus M(z,y) \cup M(x,y)$. В этом случае $M(x,s) = \nu$. С другой стороны $\mu(x,s) = 2\mu - \nu$. Отсюда $\mu = \nu$, противоречие. Теорема и следствие из теоремы доказаны.

2 Точные графы Деза без 3-коклик с $\mu = b$

2.1 Предварительные результаты

В работе [12] описаны все точные графы Деза с числом вершин не более 13. Эти графы исчерпываются следующим множеством графов $\Gamma(8,4,2,0)$, $\Gamma(8,4,2,1)$, $\Gamma(8,5,4,2)$, $\Gamma(9,4,2,1)$, $\Gamma(10,5,4,2)$, $\Gamma(12,5,2,1)$, $\Gamma(12,6,3,2)$, $\Gamma(12,7,4,3)$, $\Gamma(12,7,6,2)$, $\Gamma(12,9,8,6)$ и $\Gamma(13,8,5,4)$.

Отметим некоторые важные свойства графов Деза, полученные в [12].

Предложение 1 *Пусть M — матрица смежности графа Γ из множества $\Gamma(v,k,b,a)$. Этот граф является графом Деза тогда и только тогда, когда $M^2 = aA+bB+kE$ для некоторых $(0,1)$ — матриц A и B, таких что $A+B+E = I$, где E — единичная матрица, I — матрица, все элементы которой единицы. Заметим, что Γ — сильно регулярный граф тогда и только тогда, когда A или B есть M.*

Предложение 2 *Если граф Γ — точный граф Деза, принадлежащий множеству $\Gamma(v,k,b,a)$, тогда $\gamma = |\{w : |[u] \cap [w]| = a\}|$, $\eta = |\{w : |[u] \cap [w]| = b\}|$ не зависят от выбора вершин u и w графа Γ и равны соответственно*

$$\gamma = \frac{b(v-1)-k(k-1)}{b-a} и \quad \eta = \frac{a(v-1)-k(k-1)}{a-b}.$$

2.2 Некоторые свойства точных графов Деза без 3 - коклик с $\mu = b$

Будем предполагать, что граф Γ не содержит 3-коклик и является точным графом Деза с параметрами (v,k,b,a) и $\mu = b$. Заметим, что в этом случае Γ связный граф.

Лемма 38 *Для любой вершины x из Γ справедливы следующие утверждения:*
а) для любой вершины y из $[x]$ существует вершина z из $[x]$ такая, что y несмежна с z;

б) $\left|[x]'\right| \geq 2$*;*
в) $\mu(x,y) = 2k - v + 2$ *для любой вершины* y *из* $[x]'$*, т.е.* $b = 2k - v + 2$*.*

Доказательство.

Докажем а). Предположим, что для некоторой вершины x из Γ не выполняется утверждение а). Тогда $x^{\perp}$ — полный граф и ввиду регулярности графа Γ имеем $x^{\perp} = y^{\perp}$ для любой вершины $y \in [x]$. Граф Γ — связный, следовательно, Γ — полный граф, что противоречит определению точного графа Деза.

Докажем б). Пусть в $[x]'$ находится только одна вершина, например, w. Тогда $\mu(x,w) = k$ и любая вершина y из $[x]$ смежна с вершиной x, с вершиной w и $k-2$ вершинами из $[x]$, т.е. мы получили сильно регулярный граф, который не является точным графом Деза.

Докажем в). Рассмотрим произвольную вершину $u \notin x^{\perp}$. Так как Γ не содержит 3 - коклик, то $\Gamma = x^{\perp} \cup u^{\perp}$. Ясно, что в этом случае $v = \left|x^{\perp}\right| + \left|u^{\perp}\right| - \left|x^{\perp} \cap u^{\perp}\right|$. Обозначим $\mu = \left|x^{\perp} \cap u^{\perp}\right|$, тогда $v = 2k + 2 - \mu$ и, следовательно, $\mu = 2k - v + 2$. Лемма доказана.

Будем называть вершину u из $[x]$ вершиной "типа a" для вершины x, если $|[x] \cap [u]| = a$, а вершину w из $[x]$ вершиной "типа b" для вершины x, если $|[x] \cap [w]| = b$ и обозначим через k_a — число вершин "типа a", k_b — число вершин "типа b".

Докажем теорему 2. По лемме 38 параметр $b = 2k - v + 2$. Отсюда $v = 2k + 2 - b$. Любая вершина "типа a" из окрестности вершины x смежна с $k - a - 1$ вершиной из $[x]'$. Тогда $k - a - 1 \leq v - k - 1$, т.е. $k - a - 1 \leq k + 1 - b$. Следовательно, $b - a \in \{1, 2\}$. Теорема 2 доказана.

Непосредственно из предложения 2 следует лемма.

Лемма 39 *Для любой вершины* x *из* Γ *справедливы равенства* $k_a = \gamma$*,* $k_b = \eta - v + k + 1$ *и* $k_a + k_b = k$*.*

Доказательство. Так как $\mu = b$, то по лемме 38 в рассматриваемом графе все вершины "типа a" для x находятся только в $[x]$, значит $k_a = \gamma$. Теперь $k_b = \eta - |\,[x]'\,| = \eta - v + k + 1$. Лемма доказана.

Заметим, что k_a и k_b не зависят от выбора вершины $x \in \Gamma$.

Зафиксируем вершину x из Γ.

В леммах 40 — 44 будем предполагать, что y и z — несмежные вершины из $[x]$, такие, что $\lambda\,(x,y) = a$, $\lambda\,(x,z) = b$. Обозначим через $A = [x] \cap [y] \cap [z]$ и пусть $\alpha\,(x,y,z)$- число вершин в A. Так как Γ — регулярный граф, то $\alpha\,(x,y,z)$ не зависит от выбора вершины x и выбора несмежных вершин разных типов из окрестности x, поскольку в этом случае $k = a+b-\alpha(x,y,z)+2$ и $\alpha(x,y,z) = a+b+2-k$. Поэтому будем обозначать $\alpha\,(x,y,z)$ через α. Обозначим через δ_y число всех вершин несмежных с вершиной z в $[x]$, а δ_z — число всех вершин несмежных с вершиной y в $[x]$. Понятно, что $k = \alpha+\delta_z+\delta_y$ и $\delta_y < \delta_z$. Заметим, что $([x] \cap [y]) \setminus A$ и $([x] \cap [z]) \setminus A$ — клики.

Лемма 40 *Справедливо неравенство* $1 \le \delta_z - \delta_y \le 2$.

Доказательство. Ясно, что $b = \alpha + \delta_z + 1$, $a = \alpha + \delta_y + 1$. Тогда из теоремы 2 следует заключение леммы. Лемма доказана.

Непосредственно из леммы 40 получаем следствие.

Следствие 2 *Для графа* Γ *выполняется одно из следующих утверждений*

I. $\delta_z = \delta_y + 1$ *и* Γ *имеет параметры* $v = \alpha + 3\delta_y + 4$, $k = \alpha + 2\delta_y + 1$, $b = \alpha + \delta_y$, $a = \alpha + \delta_y - 1$, *причем* $k_a = 2\alpha + \delta_y - \delta_y^2$, $k_b = \delta_y^2 + \delta_y + 1 - \alpha$.

II. $\delta_z = \delta_y + 2$ *и* Γ *имеет параметры* $v = \alpha + 3\delta_y + 5$, $k = \alpha + 2\delta_y + 2$, $b = \alpha + \delta_y + 1$, $a = \alpha + \delta_y - 1$, *причем* $k_a = \frac{1}{2}\left(2\alpha + \delta_y - \delta_y^2 + 2\right)$, $k_b = \frac{1}{2}\left(\delta_y^2 + 3\delta_y + 2\right)$.

В первом случае будем называть граф Γ графом типа I, а во втором — графом типа II.

В дальнейшем будем обозначать δ_y через δ.

Лемма 41 *Если $\alpha = 0$, то граф Γ имеет параметры $(8, 4, 2, 0)$.*

Доказательство. Если Γ — граф типа I, то $k_a = \delta - \delta^2$ и $k_a \geq 1$. Неравенство $\delta - \delta^2 \geq 1$ решений не имеет.

Если Γ — граф типа II, то $v = 3\delta + 5$, $k = 2\delta + 2$, $b = \delta + 1$, $a = \delta - 1$, $k_a = \frac{1}{2}\left(\delta - \delta^2 + 2\right)$ и $k_a \geq 1$. Следовательно, $\delta = 1$. В этом случае получаем известный [12] точный граф Деза с параметрами $(8, 4, 2, 0)$, представленный на рисунке 1.

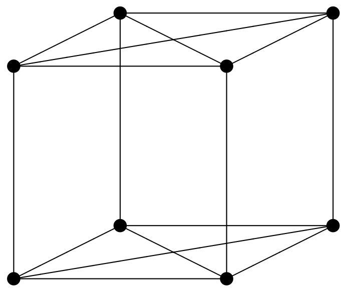

Рис. 1:

Лемма доказана.

Лемма 42 *Пусть $\delta = 1$ и $\alpha \neq 0$. Если граф Γ типа I, то Γ имеет параметры $(8, 4, 2, 1)$. Если граф Γ типа II, то Γ имеет параметры $(8n, 8n - 4, 8n - 6, 8n - 8)$.*

Доказательство.

а) Если граф Γ — граф типа I, то $v = \alpha + 7$, $k = \alpha + 3$, $b = \alpha + 1$, $a = \alpha$, $k_a = 2\alpha$, $k_b = 3 - \alpha$. Так как $k_a \geq 1$ и $k_b \geq 1$, то $\alpha \in \{1, 2\}$.

Если $\alpha = 1$, то мы получаем известный [12] точный граф Деза, имеющий параметры $(8, 4, 2, 1)$, представленный на рисунке 2.

Если $\alpha = 2$, то $v = 9$, $k = 5$, $b = 3$, $a = 2$. Из работы [12] следует, что граф Деза с такими параметрами не существует.

б) Если граф Γ — граф типа II, то по следствию из леммы 3 имеем, $v = \alpha + 8$, $k = \alpha + 4$, $b = \alpha + 2$, $a = \alpha$, $k_a = \alpha + 1$, $k_b = 3$. Заметим, что $\alpha \geq 6$, так как все графы с числом вершин не более 13 изучены в работе [12], и среди

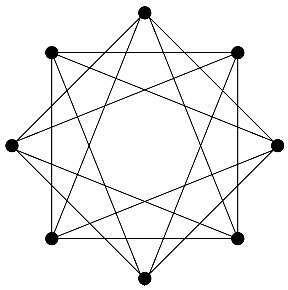

Рис. 2:

них графов с такими параметрами нет. В рассматриваемом графе все вершины "типа a" для x смежны в $[x]'$ со всеми вершинами, а каждая вершина "типа b" несмежна в $[x]'$ с двумя вершинами. Пусть $([x] \cap [z]) \setminus A = \{z_1, z_2\}$. Рассмотрим вершину z_i. Если $\lambda(x, z_i) = a$, то в $[x]'$ вершина z_i смежна со всеми вершинами. Нетрудно подсчитать, что в этом случае $\lambda(z, z_i) = \alpha + 1$, что невозможно. Следовательно, z, z_1 и z_2 — вершины "типа b" для x, а все остальные вершины из $[x]$ "типа a". Ясно, что все вершины из A смежны с вершинами y, z, z_1, z_2 и со всеми вершинами из $[x]'$. Отсюда следует, что антиокрестность любой вершины u из A лежит в A. Рассмотрим произвольные вершины u_1 и u_2 из A. Заметим, что число общих смежных вершин для вершин u_1 и u_2 равно либо $\alpha - 6$, либо $\alpha - 8$. Значит, $\alpha \geq 8$. Теперь A — точный граф Деза с параметрами $(\alpha, \alpha - 4, \alpha - 6, \alpha - 8)$. Пусть $\alpha = 8$, тогда граф A имеет параметры $(8, 4, 2, 0)$ и описан в лемме 41. Теперь по индукции граф Γ является n - соединением графа $(8, 4, 2, 0)$ и имеет параметры $(8n, 8n - 4, 8n - 6, 8n - 8)$ для некоторого $n \geq 1$. Лемма доказана.

Лемма 43 *Пусть* $\alpha = \delta$. *Если граф* Γ *— граф типа* I, *то граф* Γ *имеет параметры* $(8, 4, 2, 1)$ *или* $(12, 7, 4, 3)$.

Доказательство.

а) Если граф Γ — граф типа I и $\alpha = \delta$, то $v = 4\delta + 4$, $k = 3\delta + 1$, $b = 2\delta$, $a = 2\delta - 1$, $k_a = 3\delta - \delta^2$. Так как $k_a \geq 1$, то $\delta = 1$ или $\delta = 2$. При $\delta = 1$ граф Γ имеет параметры $(8, 4, 2, 1)$ и описан в лемме 42. При $\delta = 2$ получаем известный [12] точный граф Деза с параметрами $(12, 7, 4, 3)$.

б) Если граф Γ — граф типа II и $\alpha = \delta$, то $v = 4\delta+5$, $k = 3\delta+2$, $b = 2\delta+1$, $a = 2\delta - 1$, $k_a = \frac{1}{2}\left(3\delta - \delta^2 + 2\right)$. Так как $k_a \geq 1$, то $\delta \in \{1, 2, 3\}$. При $\delta = 1$ граф Γ имеет параметры $(9, 5, 3, 1)$, при $\delta = 2$ граф Γ имеет параметры $(13, 8, 5, 3)$. Точных графов Деза с такими параметрами не существует [12]. При $\delta = 3$ граф Γ имеет параметры $(17, 11, 7, 5)$. Изучим строение этого графа. Пусть, как и прежде, вершина x из Γ, y и z — несмежные вершины из $[x]$, такие, что $\lambda(x, y) = a$, $\lambda(x, z) = b$. Число вершин в кликах $([x] \cap [y]) \setminus A$ и $([x] \cap [z]) \setminus A$ равно δ и $\delta + 2$ соответственно. В этом графе $k_a = 1$, следовательно, вершина x единственная вершина "типа a" для вершины y. Вершина y смежна со всеми вершинами из $[x]'$, а вершина z только с тремя вершинами, например, вершина w_1, w_2, w_3. Рассмотрим вершину $w_i \in [x]'$, $i = 4, 5$. Учитывая, что $\lambda(y, w_i) = 7$ и $\mu(z, w_i) = 7$, получим, что вершина w_i должна быть смежна со всеми вершинами из $([x] \cap [y]) \setminus A$, с тремя вершинами из $([x] \cap [z]) \setminus A$ и с одной вершиной из A. Но тогда $\lambda(w_4, w_5) \notin \{a, b\}$. Следовательно, точный граф Деза с параметрами $(17, 11, 7, 5)$ не существует. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3 следует из лемм 41–43.

Лемма 44 *Если граф* Γ *— граф типа* I, *то* $\alpha \geq \delta$. *Если граф* Γ *— граф типа* II, *то* $\alpha > \delta$.

Доказательство.
а) Если граф Γ — граф типа I, то $k_a = -\delta^2 + \delta + 2\alpha$ и $k_a \geq 1$, тогда $\alpha \geq \frac{1+\delta^2-\delta}{2}$. Если $\alpha < \delta$, то $\frac{1+\delta^2-\delta}{2} < \delta$ и $\delta \in \{1, 2\}$. Если $\delta = 1$, то $\alpha = 0$, что невозможно по лемме 4. Если $\delta = 2$, то $\alpha = 1$. Тогда граф Γ имеет параметры $(11, 6, 3, 2)$. Точного графа Деза с такими параметрами нет [12]. Следовательно, $\alpha \geq \delta$.
б) Если граф Γ — граф типа II, то $k_a = \frac{1}{2}\left(2\alpha + \delta - \delta^2 + 2\right)$ и $k_a \geq 1$, тогда $\alpha \geq \frac{\delta^2-\delta}{2}$. Если $\alpha < \delta$, то $\frac{\delta^2-\delta}{2} < \delta$ и $\delta \in \{1, 2\}$. Если $\delta = 1$, то $\alpha = 0$, что опять невозможно по лемме 41. Если $\delta = 2$, то $\alpha = 1$.Тогда граф Γ имеет параметры $(12, 7, 4, 2)$. Точного графа Деза с такими параметрами нет [12]. Согласно лемме 43 имеем $\alpha \neq \delta$. Следовательно, $\alpha > \delta$. Лемма доказана.

Лемма 45 *Пусть в Γ для некоторой вершины x любая вершина "типа a" смежна со всеми вершинами "типа b", и наоборот. Тогда для любой вершины x из Γ подграф на вершинах "типа a" не является кликой.*

Доказательство. Пусть x — вершина из Γ и по условию все вершины "типа a" для x смежны между собой и смежны со всеми вершинами "типа b" для x, тогда $a = k - 1$, что противоречит определению точного графа Деза. Следовательно, в $[x]$ найдутся хотя бы две несмежные вершины "типа a". Лемма доказана.

Через $K_{n\times m}$ обозначим полный n-дольный граф, с долями порядка m.

Докажем теорему 4.

Пусть x некоторая вершина из Γ. В рассматриваемом графе $b = k-1$. Так как $b = 2k-v+2$, то $v = k+3$ и $\left|[x]'\right| = 2$. Вершины "типа b"из $[x]$ несмежны в $[x]'$ ни с одной вершиной. Более того, любая вершина из $[x]'$ должна быть смежна в $[x]$ ровно с $k-1$ вершиной, и все эти вершины "типа a". Поэтому $k_a = k-1$ и $k_b = 1$. Любая вершина "типа a" смежна с вершиной x, с a вершинами из $[x]$ и со всеми вершинами из $[x]'$, поэтому $a = k-3$. Таким образом, рассматриваемый граф имеет параметры $(k+3, k, k-1, k-3)$. Обозначим $K_a = [x] - \{z\}$, где z — единственная вершина "типа b" для x. Степень любой вершины в K_a равна $k-4$. Рассмотрим произвольные вершины y и y_1 из K_a. Ясно, что $|[y] \cap [y_1] \cap K_a| = |[y] \cap [y_1] - 4| \in \{b-4, a-4\}$. Следовательно, K_a — точный граф Деза с параметрами $(v-4, k-4, b-4, a-4)$ и $\Gamma \setminus K_a$ является графом $K_{2\times 2}$. Тогда Γ является 2 - расширением графа $K_{n\times 2}$ индукцией по n. Теорема 4 доказана.

Докажем теорему 5.

Пусть Γ — точный граф Деза с параметрами (v, k, b, a) и $b = a+2$. Тогда $\overline{\Gamma}$ регулярен степени $k' = v - k - 1$, для любых смежных вершин $u, w \in \overline{\Gamma}$ число $\lambda(u, w) = v - 2k + b - 2$ и для несмежных вершин $\mu(u, w) \in \{v - 2k + a, v - 2k + b\}$, т.е. $\mu' \in \{0, 2\}$. Значит $\overline{\Gamma}$ является вполне регулярным графом с параметрами $(v, v-k-1, 0, 2)$.

Обратно, пусть $\overline{\Gamma}$ вполне регулярный граф с параметрами $(v, v-k-1, 0, 2)$. Тогда Γ является регулярным степени k для любых смежных вершин $u, w \in \overline{\Gamma}$ число $\lambda(u, w) \in \{v-2k, v-2k-2\}$ и для несмежных $\mu(u, w) = v-2k$. Значит Γ является точным графом Деза с параметрами $(v, k, v-2k, v-2k-2)$ в случае, когда $\overline{\Gamma}$ не является сильно регулярным. Теорема 5 доказана.

Нужно отметить, что задача описания всех вполне регулярных графов без треугольников с $\mu = 2$ остается нерешенной. В этот класс входят объединения сильно регулярных графов без треугольников с $\mu = 2$, среди которых известно существование лишь графов с параметрами $(4, 2, 0, 2)$ — четырехугольник, $(16, 5, 0, 2)$ — граф Клебша, $(56, 10, 0, 2)$ — граф Гевирца. Для этих графов мф можем определить три бесконечные серии графов Деза: $(4n, 4n-3, 4n-4, 4n-6)$ (в эту серию входит и известный (см. [12]) точный граф Деза $(8, 5, 4, 2)$), $(16n, 16n-6, 16n-10, 16n-12)$ и $(56n, 56n-11, 56n-20, 56n-22)$.

2.3 Точные графы Деза, которые являются соединениями сильно регулярных графов или точных графов Деза

Лемма 46 *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) и граф G является n-соединением графа Γ. Тогда граф G является точным графом Деза, только если $\mu = \lambda$. При этом граф G имеет параметры $(nv, k+(n-1)\,v, \lambda+(n-1)\,v, 2k+(n-2)\,v)$, если $\lambda > 2k-v$ и $(nv, k+(n-1)\,v, 2k+(n-2)\,v, \lambda+(n-1)\,v)$, если $\lambda < 2k-v$.*

Доказательство. Рассмотрим n-соединение сильно регулярного графа Γ с параметрами (v, k, λ, μ). Получим граф G, у которого число вершин nv, степень каждой вершины $k+(n-1)\,v$ и $|G\,(u) \cap G\,(w)|$ принадлежит множеству $\{\lambda+(n-1)\,v, 2k+(n-2)\,v, \mu+(n-1)\,v\}$ для любых двух вершин u и w. Если G - граф Деза, то из указанных трех параметров два должны совпадать.

а) Пусть $\mu + (n-1)\,v = \lambda + (n-1)\,v$, тогда $\mu = \lambda$;

б) Пусть $\lambda + (n-1)\,v = 2k + (n-2)\,v$, тогда $\lambda = 2k - v$;

в) Пусть $\mu + (n-1)\,v = 2k + (n-2)\,v$, тогда $\mu = 2k - v$.

Рассмотрим случай а). Пусть M- матрица смежности сильно регулярного графа Γ с $\mu = \lambda$. Тогда матрица смежности графа G имеет вид

$$M_G = \begin{pmatrix} M & I & I & \dots & I \\ I & M & I & \dots & I \\ I & I & M & \dots & I \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I & I & I & \dots & M \end{pmatrix}.$$

Отсюда $M_G^2 = \left(\begin{matrix} M^2+(n-1)vI & (2k+(n-2)v)I \\ (2k+(n-2)v)I & M^2+(n-1)vI \\ (2k+(n-2)v)I & (2k+(n-2)v)I \\ \vdots & \vdots \\ (2k+(n-2)v)I & (2k+(n-2)v)I \end{matrix} \right.$

$$\left. \begin{matrix} (2k+(n-2)v)I & \dots & (2k+(n-2)v)I \\ (2k+(n-2)v)I & \dots & (2k+(n-2)v)I \\ M^2+(n-1)vI & \dots & (2k+(n-2)v)I \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (2k+(n-2)v)I & \vdots & M^2+(n-1)vI \end{matrix} \right).$$

Так как Γ- сильно регулярный граф, то $M^2 = kE + \lambda M + \mu\,(I - E - M)$.

Рассмотрим матрицу $M^2 + (n-1)vI = kE + \lambda M + \mu(I - E - M) + (n-1)vI$.

Заметим, что $M^2 + (n-1)vI = (k + (n-1)v)E + (\lambda + (n-1)v)(I - E)$.

Тогда $M_G^2 = (k + (n-1)\,v)\,E + (\lambda + (n-1)\,v) \times$

$$\times \begin{pmatrix} I-E & \Theta & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & I-E & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & \Theta & I-E & \dots & \Theta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Theta & \Theta & \Theta & \dots & I-E \end{pmatrix} +$$

$$+\left(2k+(n-2)\,v\right)\begin{pmatrix} \Theta & I & I & \dots & I \\ I & \Theta & I & \dots & I \\ I & I & \Theta & \dots & I \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I & I & I & \dots & \Theta \end{pmatrix}$$

и, согласно предложению 1, рассматриваемый граф является точным графом Деза.

Рассмотрим случай б). Тогда Г- сильно регулярный граф с $\lambda = 2k - v$.

Матрица смежности графа G и квадрат матрицы смежности такие же, как в предыдущем случае. Но матрица $M^2 + (n-1)\,vI$ представима в виде $M^2+(n-1)vI = (k+(n-1)v)E+(\lambda+(n-1)v)M+(\mu+(n-1)v)(I-E-M)$.

Тогда $M_G^2 = (k+(n-1)v)E + (\mu+(n-1)v)\times$

$$\times\begin{pmatrix} I-E-M & \Theta & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & I-E-M & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & \Theta & I-E-M & \dots & \Theta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Theta & \Theta & \Theta & \dots & I-E-M \end{pmatrix}+$$

$$+(\lambda+(n-1)v)\times\begin{pmatrix} M & I & I & \dots & I \\ I & M & I & \dots & I \\ I & I & M & \dots & I \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I & I & I & \dots & M \end{pmatrix}$$ и рассматриваемый граф является сильно регулярным графом.

Проведя аналогичные рассуждения, можно показать, что и в случае в) мы получаем сильно регулярный граф. Лемма доказана.

Лемма 47 *Пусть* Γ *— точный граф Деза с параметрами* (v,k,b,a), $b = 2k-v+2$ *и граф* G *является* n*-соединением графа* Γ. *Тогда граф* G *является точным графом Деза, только если* $b = a+2$. *При этом граф* G *имеет параметры* $(nv, k+(n-1)\,v, b+(n-1)\,v, 2k+(n-2)\,v)$.

Доказательство. Рассмотрим n-соединение точного графа Деза Γ с параметрами (v,k,b,a). Получим граф G, у которого число вершин nv, степень каждой вершины $k+(n-1)\,v$ и $|G\,(u)\cap G\,(w)|$ принадлежит множеству $\{a+(n-1)\,v, 2k+(n-2)\,v, b+(n-1)\,v\}$ для любых двух вершин u и w.

Если G — граф Деза, то из указанных трех значений два должны совпадать.

а) Пусть $a+(n-1)\,v=b+(n-1)\,v$, тогда $b=a$;

б) Пусть $b+(n-1)\,v=2k+(n-2)\,v$, тогда $b=2k-v$;

в) Пусть $a+(n-1)\,v=2k+(n-2)\,v$, тогда $a=2k-v$.

В случае а) рассматриваемый граф не является точным графом Деза (по определению). Случай б) противоречит условию теоремы.

Рассмотрим случай в). По условию теоремы $b=a+2$, с другой стороны $a=2k-v$, что возможно, только если $b=a+2$. Пусть M — матрица смежности точного графа Деза Γ с $b=a+2$. Тогда матрица смежности графа G имеет вид $M_G=\begin{pmatrix} M & I & I & \dots & I \\ I & M & I & \dots & I \\ I & I & M & \dots & I \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I & I & I & \dots & M \end{pmatrix}.$

Отсюда $M_G^2=$

$$\left(\begin{matrix} M^2+(n-1)vI & (2k+(n-2)v)I \\ (2k+(n-2)v)I & M^2+(n-1)vI \\ (2k+(n-2)v)I & (2k+(n-2)v)I \\ \vdots & \vdots \\ (2k+(n-2)v)I & (2k+(n-2)v)I \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} (2k+(n-2)v)I & \dots & (2k+(n-2)v)I \\ (2k+(n-2)v)I & \dots & (2k+(n-2)v)I \\ M^2+(n-1)vI & \dots & (2k+(n-2)v)I \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (2k+(n-2)v)I & \vdots & M^2+(n-1)vI \end{matrix}\right).$$

Так как Γ — точный граф Деза, то $M^2=aA+bB+kE$.

Рассмотрим матрицу $M^2+(n-1)vI=aA+bB+kE+(n-1)vI$.

Заметим, что $M^2+(n-1)vI=(k+(n-1)v)E+(b+(n-1)v)B$.

Тогда $M_G^2 = (k + (n-1)\,v)\,E + (b + (n-1)\,v)\begin{pmatrix} B & \Theta & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & B & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & \Theta & B & \dots & \Theta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Theta & \Theta & \Theta & \dots & B \end{pmatrix} +$

$+\,(2k + (n-2)\,v)\begin{pmatrix} A & I & I & \dots & I \\ I & A & I & \dots & I \\ I & I & A & \dots & I \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I & I & I & \dots & A \end{pmatrix}$ и, согласно предложению 1, рассматриваемый граф является точным графом Деза. Лемма доказана.

2.4 Графы Деза, которые являются кликовыми расширениями сильно регулярных графов

Лемма 48 *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ)*, граф* G *—* n*-расширение этого графа* ($n > 1$)*, тогда граф* G *является точным графом Деза, только если* $n = 2$ *и имеет параметры* $(2v, 2k+1, b, a)$*. При этом граф* $\mu = k$ *или* $\mu = \lambda + 1$*.*

Доказательство. Рассмотрим n-расширение сильно регулярного графа Γ с параметрами (v, k, λ, μ). Получим граф G, у которого число вершин nv, степень каждой вершины $nk+(n-1)$ и $|G(u) \cap G(w)|$ принадлежит множеству $\{nk + n - 2, n\lambda + 2n - 2, n\mu\}$ для любых двух вершин u и w. Если G — граф Деза, тогда возможны следующие варианты:

а) $nk + n - 2 = n\lambda + 2n - 2$, следовательно $k = \lambda + 1$. В этом случае получаем граф , который является объединением изолированных клик, т.е. не является точным графом Деза.

б) $nk + n - 2 = n\mu$, только если $n = 2$, а $\mu = k$.

в) $n\lambda + 2n - 2 = n\mu$, только если $n = 2$, а $\mu = \lambda + 1$.

Таким образом, в случаях б) и в) получаем графы Деза.

Покажем, что эти графы являются точными графами Деза. Рассмотрим более подробно случай б), т.е. $G(2v, 2k+1, 2\lambda+2, 2k)$. Пусть M — матрица

смежности графа $\Gamma(v,k,\lambda,\mu)$. Тогда матрица смежности графа 2-расширения этого графа имеет вид
$\begin{pmatrix} M & M+E \\ M+E & M \end{pmatrix}$ и
$$\begin{pmatrix} M & M+E \\ M+E & M \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2M^2+2M+E & 2M^2+2M \\ 2M^2+2M & 2M^2+2M+E \end{pmatrix}.$$

Так как Γ — сильно регулярный граф, то $M^2 = kE + \lambda M + k(I - E - M)$.

Отсюда
$$\begin{pmatrix} M & M+E \\ M+E & M \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2M^2+2M+E & 2M^2+2M \\ 2M^2+2M & 2M^2+2M+E \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2k(I-M)+2M(\lambda+1)+E & 2k(I-M)+2M(\lambda+1) \\ 2k(I-M)+2M(\lambda+1) & 2k(I-M)+2M(\lambda+1)+E \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2k(I-M) & 2k(I-M) \\ 2k(I-M) & 2k(I-M) \end{pmatrix} + 2(\lambda+1)\begin{pmatrix} M & M \\ M & M \end{pmatrix} + E =$$

$$\{I-E-M = C, I-M = C+E\} = \begin{pmatrix} 2k(C+E) & 2k(C+E) \\ 2k(C+E) & 2k(C+E) \end{pmatrix} +$$

$$2(\lambda+1)\begin{pmatrix} M & M \\ M & M \end{pmatrix} + E = 2k\begin{pmatrix} C & C+E) \\ C+E & C \end{pmatrix} + 2(\lambda+1)\begin{pmatrix} M & M \\ M & M \end{pmatrix} +$$

$(2k+1)E$.

Таким образом, согласно предложению 1, рассматриваемый граф Деза не является сильно регулярным, следовательно, это точный граф Деза. Аналогично можно показать, что и в случае в) граф $G(2v, 2k+1, 2\lambda+2, 2k)$ не является сильно регулярным.

Сильно регулярные графы, удовлетворяющие условию теоремы существуют. Действительно, в случае $\mu = k$ мы имеем полный многодольный граф (и только его). Примером графа удовлетворяющего условию $\mu = \lambda + 1$ может служить любой граф Пэли. Существуют и другие примеры таких графов [16].

Список литературы

[1] Вакула, И.А. О графах без 3-лап с некликовыми μ-подграфами, натягиваемых на 3-коклику/ И.А. Вакула, В.В. Кабанов // Изв. Урал. гос. ун-та.- 2005.- Т. 36.- Сер. Математика и механика. Вып. 7.- С. 81–92.

[2] Вакула, И.А. О графах без 3-лап с некликовыми μ-подграфами/ И.А. Вакула, В.В. Кабанов // Дискретн. анализ и исслед. опер.- Серия 1.- 2005.- Т. 12, № 4.- С. 3–22.

[3] Кабанов, В.В. Об отделимых графах с некоторыми условиями регулярности /В.В. Кабанов, А.А. Махнев // Мат.сб.- 1996.- № 10.- С. 73–86.

[4] Кабанов, В.В. Графы без 3-лап с равномощными μ-подграфами/В.В. Кабанов, А.А. Махнев // Изв. Урал. гос. ун-та.- Математика и механика.- 1998.- № 10.- С.44–68.

[5] Кабанов, В.В. Графы без 3-лап с равномощными μ-подграфами/ В.В. Кабанов, А.А. Махнев // Изв. Урал. гос. ун-та.- 1998.- № 10- (Математика и механика. Вып.1).- С. 44–68.

[6] Кабанов, В.В. О графах без корон с регулярными μ-подграфами, II/ В.В. Кабанов, А.А. Махнев, Д.В. Падучих // Математические заметки.- 2003.- Т. 74 - С .396–406.

[7] Махнев, А.А. О сильной регулярности некоторых реберно регулярных графов/ А.А. Махнев // Изв. РАН. Сер. матем.- Т. 68, № 1.- 2004.- С. 159–182.

[8] Brouwer, A.E. A characterization of some graphs which do not contain 3-claws/A.E. Brouwer, M. Numata // Discrete Math.- 1994.- V. 124.- P. 49–54.

[9] Chang, L.C. The uniqueness and nonuniqueness of triangular association schemes/ L.C. Chang // Sci. Record.- 1949.- Vol. 3.- P. 604–613.

[10] Chang, L.C. Association schemes of partially balanced block designs with parameters $v = 28, n_1 = 12, n_0 = 15$ and $p_n^2 = 4$/ L.C. Chang // Sci. Record.- 1950.- Vol. 4.- P. 12–18.

[11] Deza, A. The ridge graph of the metric polytope and some relatives/ A. Deza, M. Deza // in T. Bisztriczky, P. McMullen, R. Schneider and A. Ivic Weiss (eds.), "Polytopes: Abstract, Convex and Computational"Dordrecht, Kluwer.- 1994.- P. 359–372.

[12] Erickson, M. Deza Graphs: A Generalization of Strongly Regular Graphs/ M. Erickson, S. Fernando, W.H. Haemers, D. Hardy, J. Hemmeter // J. Combin. Designs.- 1999.- Vol. 7.- P. 395–405.

[13] Hoffman, A.J. On the uniqueness of the triangular association scheme/ A.J. Hoffman // Ann. Math. Stat.- 1960.- Vol. 31.- P. 492–497.

[14] Hoffman, A.J. On the exceptional case in a characterization of the arcs of complete graphs/A.J. Hoffman // IBM J. Res. Develop.- 1960.- Vol. 4.- P. 487–496.

[15] Hoffman, A.J. On the line-graphs of the complete bipartite graph/ A.J. Hoffman // Ann. Math. Stat.- 1964.- Vol. 35.- P. 883–885.

[16] Hubaut Xavier L. Strongly regular graphs / L. Hubaut Xavier // Discret Mathematics.- 1964.- Vol. 13.- P. 357–381.

[17] Seidel, J.J. Strongly regular graphs with $(-1, 1, 0)$ adjacency matrix having eigenvalue 3/ J.J. Seidel // Linear Algebra and Appl.- 1968.- Vol.1.- P. 281–298.

[18] Shrickhande, S.S. The uniqueness of the association scheme/ S.S. Shrickhande // Ann. Math. Stat.- 1959.- Vol. 30.- P. 781–798.

Работы автора по теме диссертации

[19] Ермакова, Г.М. Графы Деза, которые являются кликовыми расширениями сильно регулярных графов / Г.М. Ермакова, В.В. Кабанов / Проблемы теорет. и прикл. математики: тр. 37-й регион. молодеж. конф. Екатеринбург: УрО РАН, 2006.- С. 27–29.

[20] Ермакова, Г.М. Точные графы Деза без 3-коклик с большим μ / Г.М. Ермакова, В.В. Кабанов / Проблемы теорет. и прикл. математики: тр. 38-й молодеж. конф. Екатеринбург: УрО РАН, 2007.- С. 31–34.

[21] Ермакова, Г.М. Свойства графов без порожденных подграфов $K_{1,3}$/ Г.М. Ермакова, В.В. Кабанов, Е.Ш. Сабирзянова, Го Вэньбинь // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН.- 2008.- Т. 14.- № 4.- С. 43–52.

[22] Ермакова, Г.М. Точные графы Деза, которые являются соединениями сильно регулярных графов или точных графов Деза / Г.М. Ермакова, В.В. Кабанов / Проблемы теорет. и прикл. математики: тр. 39-й всероссийской молодеж. конф. Екатеринбург: УрО РАН, 2008.- С. 11–15.

[23] Ермакова, Г.М. Некоторые свойства точных графов Деза без 3-коклик с $\mu = b$ / Г.М. Ермакова / Проблемы теорет. и прикл. математики: тр. 40-й молодеж. конф. Екатеринбург: УрО РАН, 2009.- С. 19–27.

[24] Ермакова, Г.М. Характеризация одного класса графов без порожденных $K_{1,3}$-подграфов/ Г.М. Ермакова, В.В. Кабанов/ Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН.- 2009.- Т. 15.- № 2.- С. 98–112.